

Über die Hundekurven mit konstantem Schielwinkel.

by Wunderlich, Walter

in: Monatshefte für Mathematik, (page(s) 277 -
311)

Wien [u.a.]; 2003

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright.

Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersaechsische Staats- und Universitaetsbibliothek

Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen

Germany

Email: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

Über die Hundekurven mit konstantem Schielwinkel

Von

Walter Wunderlich, Wien

Mit 15 Textabbildungen

(Eingegangen am 8. März 1957)

1. Problemstellung

Unter der „Hundekurve“ versteht man im engeren Sinn die Bahn eines sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegenden Verfolgers, der einem gleichförmig-geradlinig fortschreitenden Ziel in der Weise nach-eilt, daß seine Bewegungsrichtung ständig auf den jeweiligen Standort des Ziels weist. Sieht man von dem trivialen Fall ab, daß sich der Ver-folger von vornherein auf der Zielbahn befindet (die er dann nicht mehr verlassen würde), so wird sich seine Bewegungsrichtung fortwährend ändern und er wird einen gekrümmten Weg zurücklegen, der in einer Ebene liegt und dessen Gestalt wesentlich vom Geschwindigkeitsverhält-nis abhängt. Die Ermittlung der auftretenden Bahnkurven führt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung, welche sich unschwer elementar integrieren läßt.

Diese auf *Bouguer* (1732), vielleicht sogar auf *L. da Vinci* zurück-gehende Aufgabe wurde wiederholt in mannigfachen Einkleidungen behandelt, so daß die Hundekurve auch unter anderen Namen, wie Hasenlinie, Verfolgungskurve, Ansteuerungslinie usw. anzutreffen ist¹. Die alte Aufgabe gewann nun in jüngerer Zeit neue und besondere Bedeutung durch die Entwicklung sogenannter zielsuchender Geschosse

¹ *Bouguer*: Sur de nouvelles courbes auxquelles on peut donner le nom de lignes de poursuite. Mém. math. phys. Ac. Sci. Paris, 1732, 1—14. *De Maupe-rtuis*: Sur les courbes de poursuite. Ebenda, 15—16. — Zusammenfassende Darstellung bei *G. Loria - F. Schütte*: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven (Leipzig/Berlin 1911), Bd. II, 241—247. Vgl. ferner *V. Lalan*: Contribution à l'étude de la courbe de poursuite. Comptes rendus 192 (1931), 466—469.

(z. B. Geräuschtorpedos und Radarraketen) und erfuhr in diesem Zusammenhang verschiedene *Verallgemeinerungen*, von welchen vor allem jene auch geometrisch interessant ist, die verlangt, daß die *Bewegungsrichtung des Verfolgers von der Peilrichtung zum Ziel ständig um einen vorgeschriebenen, festen Winkel σ abweiche*, der kurz „*Schielwinkel*“ genannt wird. Dieses Verfolgungsproblem — das für $\sigma = 0$ auf die gewöhnlichen Hundekurven führt — ist im Auftrage der deutschen Marine von *R. Hosemann* bearbeitet worden².

Diese verallgemeinerten Hundekurven bilden auch den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung, deren Ergebnisse bereits 1944 vorlagen, bisher jedoch noch nicht veröffentlicht worden sind. Besonderer Wert wird der verwendeten *geometrischen Methode* beigemessen, die gegenüber dem ziemlich undurchsichtigen analytischen Lösungsweg eine bemerkenswert übersichtliche Behandlung des Problems gestattet und neue Zusammenhänge aufdeckt. Sie bedient sich eines *räumlichen Weg-Zeit-Diagramms* des ebenen Bewegungsvorgangs, gewissermaßen eines „*Räumlichen Fahrplans*“: In sinngemäßer Übertragung der bekannten „*Graphischen Fahrpläne*“ für eindimensionale Bewegungsvorgänge wird nämlich das Geschehen in der (waagrecht gedachten) Ebene dadurch auf den dreidimensionalen Punkttraum abgebildet, daß man die Zeit als dritte Koordinate senkrecht zu dieser Grundebene aufträgt. Die Bewegung eines Punktes in der Grundebene wird dann durch eine räumliche „*Schicksalslinie*“ beschrieben, deren Grundriß mit der Bahn des Punktes zusammenfällt und deren Anstieg zur Geschwindigkeit umgekehrt proportional ist. Der Verfasser hat diese Methode schon früher für ähnliche Zwecke mit Erfolg eingesetzt³ und gelegentlich insbesondere auch auf ihre Verwendbarkeit im Bereich der geometrischen Optik hingewiesen⁴.

² *R. Hosemann*: Verfolgungskurven. Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939—1946, Bd. 3/I, 269—307.

³ *W. Wunderlich*: Über fünf Aufgaben der Seetaktik. Z. math. natw. Unterr. 72 (1941), 97—102.

⁴ *W. Wunderlich*: Dreidimensionale graphische Fahrpläne. Vortrag, gehalten am 26. 9. 1950 anlässlich der Tagung für mathematischen Unterricht in Graz (Nachr. Österr. Math. Ges. Nr. 13, S. 5). — Den Einsatz derartiger Raumdigramme in der Optik empfiehlt auch *A. Reuschel*: Über ein dreidimensionales Verfahren zur Behandlung optischer Probleme. Optik 10 (1953), 470—475. Eine einfache Konstruktion und Berechnung der Schmidtschen Korrektionslinse mit Hilfe einer räumlichen Abbildung. Vortrag, gehalten am 21. 9. 1956 anlässlich des IV. Österr. Mathematikerkongresses in Wien (Nachr. Österr. Math. Ges. Nr. 47/48, S. 83).

Bei der vorliegenden Verfolgungsaufgabe ist die Schicksalslinie des gleichförmig-geradlinig fortschreitenden Ziels eine *Gerade*, während die Schicksalslinie des ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit nacheilenden Verfolgers eine gewisse *Böschungslinie* (Kurve konstanter Steigung) sein wird, von der sich zeigen läßt, daß sie auf einem bestimmten *Kegel oder Zylinder 2. Grades* verläuft und als Bahnkurve einer eingliedrigen Gruppe von Affinitäten angesehen werden kann, welche den Kegel bzw. Zylinder in sich transformieren: *Die Hundekurven mit konstantem Schielwinkel erweisen sich damit als Parallelprojektionen spezieller räumlicher W-Kurven.* — Die angedeutete Behandlungsweise läßt sich konstruktiv und rechnerisch durchführen. Sie gestattet eine befriedigende und aufschlußreiche Beantwortung aller einschlägigen Fragen und liefert insonderheit eine übersichtliche Klassifikation der recht formenreichen Familie der verallgemeinerten Hundekurven und jeweils eine angemessene Parameterdarstellung.

2. Räumliches Fahrplandiagramm

Zunächst sei nochmals, unter Festlegung gewisser Bezeichnungen, das vorliegende Verfolgungsproblem ausführlich in geometrischer Fassung formuliert (vgl. Abb. 1):

„Ein punktförmiges Ziel Q' wandert von der Ausgangsposition Q_0 aus mit konstanter Geschwindigkeit v_Q entlang einer Geraden l' der Grundebene π . Ein punktförmiger Verfolger P' mit der Ausgangsposition P_0 eilt in π dem Ziel mit ebenfalls konstanter Geschwindigkeit v_P nach, derart, daß seine Bewegungsrichtung fortwährend mit der Peilrichtung $P'Q'$ einen festen Schielwinkel σ einschließt. Was für eine Bahn k' durchläuft der Verfolger, erreicht er sein Ziel, und wenn ja: wann, wo und unter welchem Winkel?“

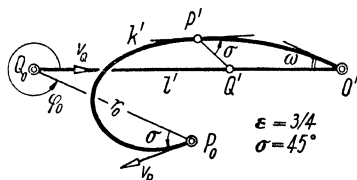


Abb. 1.

Wie angekündigt, entwickeln wir nun ein *räumliches Weg-Zeit-Diagramm* des Geschehens in der Ebene π , indem wir senkrecht über dem jeweiligen Standort X' eines beweglichen Punktes die seit dem Ausgangszustand verflossene Zeit τ in einem bestimmten Maßstab als Länge auftragen, wodurch wir zum Diagrammpunkt X gelangen, dessen Ortslinie das Schicksal des bewegten Punktes vollkommen beschreibt.

Um den Zeitmaßstab festzulegen, wollen wir vereinbaren, auf der Zeitachse die Längen $z = v_P \cdot \tau$ aufzutragen. Als *Schicksalslinie des Verfolgers* P' wird dann eine unter 45° ansteigende *Böschungslinie* k auftreten, deren Bestimmung unsere Hauptaufgabe ist, während die *Schicksalslinie des Ziels* Q' eine von vornherein bekannte *Gerade* l ist, die durch ihren Grundriß l' , ihren Spurpunkt Q_0 und ihre Steigung $\operatorname{tg} \nu = v_P/v_Q$ bestimmt ist. Die Schicksalslinie k legt, sobald sie ermittelt ist, den Ablauf der Verfolgung und durch ihren allfälligen Schnittpunkt mit der Schicksalsgeraden l des Ziels auch das Treffereignis örtlich und zeitlich vollständig fest.

Wir nehmen nun auf der Schicksalsgeraden l einen Punkt O zunächst beliebig an und betrachten an Hand von Abb. 2 die *Zentralprojektion* unseres Fahrplandiagramms aus O auf π (Kennzeichnung der Zentralrisse durch einen oberen Zeiger c); der „Distanzkreis“ dieser Projektion,

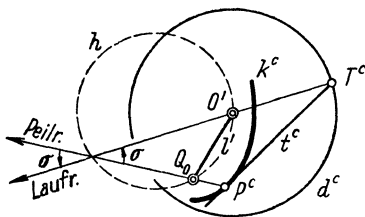


Abb. 2.

d. i. der Kreis mit dem Mittelpunkt O' und dem Radius $O'O$, sei mit d^c bezeichnet. Die zu gleichzeitigen Lagen von P' und Q' gehörigen Diagrammpunkte P und Q liegen in gleicher Höhe über π , führen daher auf eine zu PQ und $P'Q'$ parallele Bildstrecke $P^c Q^c$; da außerdem $Q^c = Q_0$, so gibt $P^c Q_0$ die *Peilrichtung* an. Fassen wir ferner die in P

berührende, unter 45° ansteigende Tangente t der Schicksalslinie k ins Auge: Ihr Fernpunkt T hat seinen Zentralriß T^c auf dem Distanzkreis d^c und der Radius $T^c O'$ ist parallel zur *Bewegungsrichtung* t' , weicht also laut Voraussetzung von der Peilrichtung $P^c Q_0$ um den konstanten Schielwinkel σ ab.

Auf diese Weise wird jedem Punkt P^c der Ebene eine gewisse Fortschreitung $t^c = P^c T^c$ zugeordnet, die durch die Angabe von Q_0 , d^c und σ vollständig (wenn auch zweideutig) bestimmt ist. Der Zentralriß k^c der Schicksalslinie k ist eine Integralkurve des so erklärten Richtungsfeldes $\{P^c, t^c\}$ und das Verfolgungsproblem erscheint durch die Einführung des Zentralrisses im Prinzip zunächst auf eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung zurückgeführt.

Wir werden nun zeigen, daß erstens unter den Integralkurven des Richtungsfeldes $\{P^c, t^c\}$ als ausgezeichnete Lösung ein *Kegelschnitt* vorkommt, und daß es sich zweitens durch passende Wahl des Projektions-

zentrums O auf l stets so einrichten läßt, daß dieser Kegelschnitt just den Zentralriß k^c der gesuchten Verfolger-Schicksalslinie k darstellt.

3. Ein Hilfssatz über Kegelschnitte

Wir betrachten — unabhängig von den bisherigen Bezeichnungen — in der Ebene einen *Kegelschnitt* c , der einen *Kreis* c^* in zwei Punkten U, V berührt; der Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten daselbst sei W . In einem beliebigen Punkt $X \neq U, V$ von c legen wir die Tangente und bezeichnen einen ihrer auf dem Kreis c^* liegenden Punkte mit X^* (Abb. 3).

Sei nun \mathfrak{A} jene *Kollineation*, die die Punkte U, V und W einzeln festläßt und X nach X^* bringt: Sie transformiert, wie leicht zu sehen ist, den Kegelschnitt c in den Kreis c^* , und wir behaupten, daß hierbei auch jeder weitere Punkt Y^* von c^* auf der Tangente seines entsprechenden Punktes Y liegt. Um dies einzusehen, ziehen wir jene

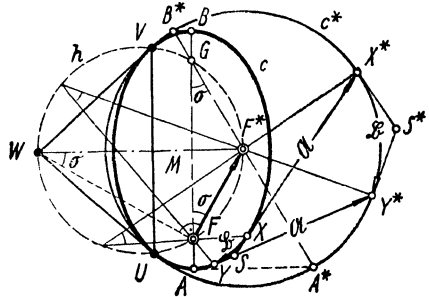


Abb. 3.

zweite *Kollineation* \mathfrak{B} heran, die gleichfalls die Punkte U, V und W unverändert läßt, aber X nach Y bringt: Sie transformiert c und daher auch c^* in sich. Auf Grund der Vertauschbarkeit von Kollineationen mit demselben Fixdreieck gilt für den auf der Tangente von Y liegenden Punkt $\mathfrak{B}.X^* = \mathfrak{A}\mathfrak{B}.X = \mathfrak{A}\mathfrak{B}.X = \mathfrak{A}.Y = Y^*$, womit die Behauptung erwiesen ist⁵.

Dem Schnittpunkt S der Kegelschnittstangenten in X und Y entspricht vermöge \mathfrak{A} der Schnittpunkt S^* der Kreistangenten in X^* und Y^* . Nehmen wir insbesondere für X^* und Y^* die absoluten Kreispunkte I^* und J^* , so fällt S^* in die Kreismitte F^* und S in den Schnitt zweier isotropen Kegelschnittstangenten, also in einen bestimmten Brennpunkt F von c . Dem *Brennstrahlbüschel* F von c ist also vermöge \mathfrak{A}

⁵ Der Sachverhalt wird anschaulich besonders klar, wenn man sich die Fixpunkte U, V in die absoluten Kreispunkte verlegt denkt: c und c^* sind dann konzentrische Kreise und \mathfrak{A} ist eine *Drehstreckung* um den gemeinsamen Mittelpunkt W .

das *Durchmesserbüschel* F^* von c^* zugeordnet, und zwar nicht bloß projektiv, sondern wegen der entsprechenden Minimalstrahlenpaare sogar *gleichsinnig-kongruent*. Mit anderen Worten heißt das, *die Strahlen* FX und F^*X^* *schließen einen festen Winkel* σ *ein*, wobei X, X^* ein beliebiges Punktepaar der Kollineation sein darf.

Der Ort der Winkelscheitel ist als Erzeugnis der gleichsinnig-kongruenten Büschel F und F^* ein gewisser *Kreis* h , der natürlich durch die Fixpunkte U, V und W geht, da dort entsprechende Punkte zusammenfallen; h enthält überdies die Büschelscheitel F, F^* und aus Symmetriegründen auch den zweiten Brennpunkt G . Fassen wir speziell diesen als Scheitel von σ auf, so erkennen wir, daß die Hauptachse des Kegelschnitts c gegen die Strecke FF^* um den Winkel σ abweicht (Abb. 3).

4. Die Hundekurven als Grundrisse spezieller Böschungslinien auf Kegeln oder Zylindern 2. Grades

Nummehr haben wir den Anschluß an Abschn. 2 gewonnen: Die Figuren 2 und 3 lassen sich identifizieren, wenn wir Q_0 mit F, O' mit F^* und d^c mit c^* zusammenfallen lassen; der durch Angabe des Winkels σ festgelegte Kegelschnitt c wird sich dann mit dem Zentralriß k^c der Verfolger-Schicksalslinie decken, wenn er durch die Anfangsposition P_0 geht. Dies wird wohl bei willkürlicher Annahme von O auf l nicht zutreffen, doch läßt sich die Erfüllung dieser Anfangsbedingung durch eine geeignete zentrische Streckung von Q_0 aus stets erzwingen.

Zu einer direkten Konstruktion des Kegelschnitts k^c verhilft uns die Kenntnis seiner *numerischen Exzentrizität* ε . Man liest nämlich aus Abb. 3 und 2 ab:

$$\varepsilon = GM : MA = GF^* : F^*A^* = O'Q_0 : O'T^c = v_Q : v_P. \quad (4.1)$$

Die numerische Exzentrizität ist also unmittelbar durch das *Geschwindigkeitsverhältnis* von Ziel zu Verfolger gegeben und k^c ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $v_Q \stackrel{\leq}{\geq} v_P$.

Damit ergibt sich schließlich folgende Konstruktion von k^c aus $P_0, Q_0, l', v_Q : v_P = \varepsilon$ und σ (Abb. 4): Verdrehung der Zielgerade l' um Q_0 durch den Schielwinkel σ liefert die Hauptachsenrichtung von k^c . Senkrecht dazu verläuft die zum Brennpunkt Q_0 gehörige Leitlinie q , und zwar im Abstand P_0Q_0/ε von P_0 . Nun ist der Kegelschnitt k^c als Ort aller Punkte, deren Abstände von Q_0 und q sich wie $\varepsilon : 1$ verhalten, festgelegt. Seine Nebenachse schneidet aus l' den Mittelpunkt O' des

Distanzkreises d^c aus, dessen Radius den Betrag $O'Q_0/\varepsilon$ hat⁶. — Die beiden Berührungspunkte von k^c und d^c seien hinfort sinngemäß mit U^c und V^c bezeichnet, der zugehörige Berührungspol mit W^c ; letzterer wird auf der Nebenachse von dem zu l' normalen Brennstrahl ausgeschnitten, erstere liegen auf dem Kreis über dem Durchmesser $O'W^c$.

Diese Konstruktion artet allerdings für $\varepsilon = 1$ aus, weil O' und damit auch O , V^c und W^c Fernpunkte werden; dieser Sonderfall des „Nachläufers“ wird in Abschnitt 12 behandelt. Auch für $\sigma = \pm 90^\circ$ rückt O ins Unendliche; diesem Grenzfall des „Querläufers“ sind die Abschnitte 13—15 gewidmet.

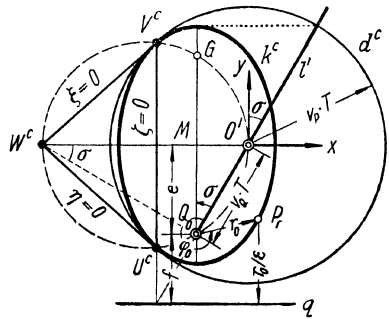


Abb. 4.

Mit der Kenntnis des Projektionskegelschnittes k^c der gesuchten Verfolger-Schicksalslinie k steht uns nun für diese eine einfache Trägerfläche zur Verfügung, nämlich der projizierende Kegel oder Zylinder 2. Grades Γ mit der Spitze O und der Basis k^c . Das Hundekurvenproblem ist damit zurückgeführt auf die Ermittlung der 45°-Böschungslinien der Fläche Γ , unter welchen die Schicksalslinie k als eine der beiden von P_0 ausgehenden zu finden ist.

Die Fernpunkte aller unter 45° gegen die Grundebene π geneigten Geraden erfüllen einen gewissen Fernkegelschnitt d , der „Böschungsfernkreis“ genannt werden soll. Im Falle eines eigentlichen Projektionszentrums O stellt der Distanzkreis d^c seinen Zentralriß dar, und auf Grund der Doppelberührung zwischen k^c und d^c in den Punkten U^c und V^c (Abb. 4) erkennen wir, daß der Böschungsfernkreis d den Trägerkegel Γ in zwei (uneigentlichen) Punkten U und V berührt; diese Berührung findet auch noch im Grenzfall eines Trägerzylinders Γ

⁶ Die bei der Konstruktion der Leitlinie q eintretende Zweideutigkeit läßt sich auf Grund der durch die Aufgabenstellung bedingten Orientierung ausschalten. Beschränkt man sich etwa auf spitze Schielwinkel — was für eine wirkliche „Verfolgung“ unerläßlich ist, aber auch geometrisch keine wesentliche Einschränkung bedeutet, da bloße Bewegungsumkehr den Schielwinkel um 180° ändert —, so ist von den beiden Lösungen stets jene auszuwählen, bei welcher O' auf den dem positiven Bewegungsablauf entsprechenden Halbstrahl von l' zu liegen kommt.

(für $\varepsilon=1$ oder $\sigma=90^\circ$) statt. — Diese *Doppelberührung* wird uns die Ermittlung der benötigten Böschungslinien entscheidend erleichtern⁷. Bevor wir jedoch hierauf eingehen, wollen wir die bisherigen Hauptergebnisse zusammenfassend festhalten:

Satz 1. Die Hundekurve mit konstantem Schielwinkel ist der Grundriß einer Böschungslinie auf einem Kegel oder Zylinder 2. Grades, der den Böschungsfernkreis doppelt berührt und einen Basiskegelschnitt besitzt, dessen numerische Exzentrizität gleich dem Quotienten aus Ziel- und Verfolgergeschwindigkeit ist.

5. Die Verfolger-Schicksalslinien als spezielle *W*-Kurven (Bahnkurven eingliedriger Affinitätsgruppen)

Bezeichne jetzt Γ einen *eigentlichen* Trägerkegel 2. Grades, O seine Spitze, ω die Fernebene, c den ihr angehörenden (regulären) Fernkegelschnitt von Γ , d wieder den doppelt berührenden Böschungsfernkreis, U und V die Berührungspunkte und W den zugehörigen Berührungspol. Gesucht ist die durch einen bestimmten Oberflächenpunkt P_0 gehende *Böschungslinie* von Γ , also eine auf Γ verlaufende und P_0 enthaltende Kurve k , deren sämtliche Tangenten den Fernkreis d treffen. Wir wollen ausdrücklich voraussetzen, daß P_0 weder in ω noch auf einer der Erzeugenden OU und OV liege.

Wir wählen in einer genügend kleinen Umgebung von P_0 einen zweiten Oberflächenpunkt P_1 , so zwar, daß die Gerade P_0P_1 den Fernkreis d treffe, und betrachten jene wohlbestimmte *Affinität* \mathfrak{A} , welche die Punkte O , U , V , W einzeln festläßt und P_0 nach P_1 bringt. Diese Affinität führt den Kegel Γ in sich über, ebenso dessen Fernkegelschnitt c und jeden weiteren, c in U und V berührenden, insbesondere also auch den Fernkreis d ⁸. Durch wiederholte Anwendung der Transformation \mathfrak{A} bzw. ihrer Umkehrung \mathfrak{A}^{-1} gelangen wir von P_0 zu einer beiderseits unendlichen Punktfolge $\dots P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \dots$ auf Γ , die wir

⁷ Die Ermittlung der Böschungslinien eines beliebigen Kegels 2. Grades läuft im allgemeinen — d. h. wenn er mit dem Böschungsfernkreis vier getrennte Punkte gemein hat — auf elliptische Integrale hinaus.

⁸ Der Kegel Γ berührt zwei Seiten des Fixtetraeders längs der Kanten OU und OV und wird vermöge \mathfrak{A} in einen gleichartigen Kegel übergeführt, der den P_0 entsprechenden Punkt P_1 enthält; der hiedurch eindeutig festgelegte Kegel ist daher mit Γ identisch. Die Invarianz der Fernebene ω bedingt die Invarianz von c und diese zieht die Invarianz von d nach sich, da d aus c durch eine invariante Zentralkollineation mit dem Zentrum W und der Achse UV abgeleitet werden kann.

durch Hinzunahme der Verbindungsstrecken aufeinanderfolgender Punkte zu einem *Polygon* \mathfrak{f} ergänzen. Dieses Polygon ist unempfindlich gegenüber \mathfrak{Z} und natürlich auch gegenüber der von \mathfrak{Z} erzeugten *diskontinuierlichen Transformationsgruppe* \mathfrak{Z}^n (n ganz): Wir haben in \mathfrak{f} ein dem Kegel Γ eingeschriebenes, gegenüber der Gruppe invariantes Polygon, dessen Seiten sämtlich den Fernkreis d treffen. Letzteres folgt aus der Invarianz von d und der besonderen Wahl von P_1 .

Lassen wir nun unter Einhaltung aller Bedingungen P_1 gegen P_0 rücken, dann konvergiert nach S. Lie das invariante Polygon \mathfrak{f} gegen eine auf der Kegeloberfläche verlaufende Kurve k , die gegenüber einer *kontinuierlichen Affinitätsgruppe* \mathfrak{Z}^n (n beliebig) unempfindlich ist und deren sämtliche Tangenten den Fernkreis d treffen⁹. So erhalten wir die gesuchte *Böschungslinie* k als *Bahnkurve einer eingliedrigen, kontinuierlichen Gruppe von automorphen Affinitäten des Kegels Γ* , also als spezielle „*W-Kurve*“ im Sinne von F. Klein¹⁰. In Ergänzung zu Satz 1 gilt mithin der

Satz 2: Die Schicksalslinie eines auf einer Hundekurve mit konstantem Schielwinkel laufenden Verfolgers ist eine spezielle, auf einem Kegel oder Zylinder 2. Grades verlaufende W-Kurve, Bahnkurve einer kontinuierlichen eingliedrigen Gruppe von automorphen Affinitäten des Böschungsfernkreises. Im Falle eines dem Ziel an Geschwindigkeit überlegenen Verfolgers stellt die Kegelspitze den Schicksalspunkt des Treffereignisses dar.

Die zweite Hälfte des Satzes ist dadurch bedingt, daß für $v_p > v_q$ ($\varepsilon < 1, \sigma \neq 90^\circ$) der Böschungsfernkreis d den Kegel Γ umschließt. In diesem Falle mündet die Böschungslinie k in der Kegelspitze O , wie eine nähere Untersuchung der Punktfolge $\{P_n\}$ lehrt. Da O auch auf l liegt, haben wir den Schicksalspunkt des Zusammentreffens von Verfolger und Ziel vor uns. — Für $v_p < v_q$ verliert der Kegelscheitel O diese Bedeutung, da er der Schicksalslinie k nicht angehört (vgl. Abschn. 11).

⁹ Vgl. W. Wunderlich: Über die Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 155 (1947), 309—331, insb. Abschn. VI.

¹⁰ Die vorliegenden Affinitäten führen den reellen Fernkreis d in sich über, können demnach als *Ähnlichkeiten bzw. Bewegungen einer pseudo-euklidischen Geometrie* aufgefaßt werden — „C-Geometrie“ bei E. Müller - J. Krames: Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. II „Die Zyklographie“ (Leipzig/Wien 1929). In diesem Sinne wären dann die auftretenden *W-Kurven* als pseudo-euklidische Seitenstücke zu den zylindrokonischen Spiralen bzw. Schraublinien anzusehen.

Während die vom Verfolger beschriebene Hundekurve, wie eingangs gesagt, im Grundriß k' der Schicksalslinie k erhalten wird, stellt deren *Schrägriß* k^s in Richtung von l die *vom Ziel aus beobachtete Relativbahn* dar:

Satz 3. Die Relativbahn des auf einer Hundekurve mit konstantem Schielwinkel laufenden Verfolgers im Zielsystem ist die Parallelprojektion der W-Kurve aus Satz 2 in Richtung der Schicksalsgeraden des Ziels.

6. Isochronen

Denken wir uns die kontinuierliche Affinitätsgruppe \mathfrak{L}^n auf sämtliche Punkte des in der Grundebene π liegenden Basiskegelschnitts k^c des Kegels Γ angewendet, so beschreibt jeder dieser Punkte eine auf Γ liegende W -Kurve von der Art der Bahn k von P_0 . Da die Fortschreitrichtungen aller Punkte einer Kegelerzeugenden untereinander parallel sind¹¹, so handelt es sich durchwegs um Böschungslinien desselben Anstiegs. Diese ∞^1 Linien sind untereinander *ähnlich*, da sie durch die zentrischen Ähnlichkeiten von der Kegelspitze O aus untereinander vertauscht werden (wobei unter Umständen auch komplexe Ähnlichkeitsfaktoren zuzulassen sind); Gleiches gilt dann natürlich auch für ihre Parallelprojektionen.

Die ∞^1 in Rede stehenden W -Kurven stellen die Schicksalslinien von ∞^1 Verfolgern dar, die zu gleicher Zeit und unter gleichen Bedingungen von ihren Ausgangspositionen auf dem Kegelschnitt k^c aus die Verfolgung desselben Ziels aufnehmen. In jedem Augenblick erfüllen die zugehörigen Schicksalspunkte eine bestimmte *Schichtenlinie* des Trägerkegels Γ , also einen *zu k^c ähnlichen Kegelschnitt*. Die Grundrisse dieser Kegelschnitte sind die von *Hosemann* eingeführten „*Isochronen*“². — Abb. 5 zeigt ein solches System von Isochronenellipsen samt der zugehörigen Ähnlichkeitsschar von Verfolgungskurven. Sämtliche Bahnabschnitte zwischen zwei Isochronen sind gleich lang. Weil $\varepsilon < 1$, so wird das Ziel erreicht, und zwar von allen Verfolgern gleichzeitig. Unter Beschränkung auf diesen Fall formulieren wir den

Satz 4: Alle Verfolger mit gleicher Geschwindigkeit und gleichem Schielwinkel, die dasselbe (an Geschwindigkeit unterlegene) Ziel zu gleicher

¹¹ Entsprechende Punktreihen auf zwei einander durch eine Affinität \mathfrak{L}^n ($n \neq 0$) zugeordneten Kegelerzeugenden sind projektiv, wegen des selbstentsprechenden Punktes O in perspektiver Lage und wegen der entsprechenden Fernpunkte durch ein Parallelenbüschel aufeinander bezogen. Aus den parallelen Bahnsehnen werden dann mit $n \rightarrow 0$ in der Grenze parallele Bahntangenten für die Punkte einer Erzeugenden.

Zeit und am gleichen Ort treffen, befinden sich in jedem Augenblick auf einer gewissen Isochronenellipse, in deren einem Brennpunkt jeweils das Ziel steht.

Ferner gilt

Satz 5: Alle Hundekurven mit gleichem Geschwindigkeitsverhältnis und gleichem Schielwinkel sind untereinander ähnlich, wobei allerdings unter Umständen komplexe Ähnlichkeitsfaktoren auftreten können.

So sind beispielsweise in Abb. 5 die innerhalb des spitzen Winkels $U^c O' V^c$ verlaufenden Hundekurven untereinander reell-ähnlich, ebenso die außerhalb gelegenen, während innere und äußere Bahnen durch komplexe Ähnlichkeiten zusammenhängen.

7. Klassifikation der Hundekurven mit konstantem Schielwinkel

Bei der Diskussion der möglichen Hundekurventypen können wir uns auf *spitze Schielwinkel*, also $|\sigma| \leq 90^\circ$ beschränken; im Falle eines stumpfen Schielwinkels bewirkt nämlich gleichzeitige Umkehr des Bewegungssinnes bei Ziel und Verfolger eine Reduktion von σ um $\pm 180^\circ$, ohne an der Gestalt der Verfolgerbahn etwas zu ändern.

Ein erstes Einteilungsprinzip bietet zunächst das Geschwindigkeitsverhältnis $\varepsilon = v_Q : v_P > 0$, wobei der triviale Grenzfall $\varepsilon = 0$ von vornherein ausgeschaltet sei (bei ruhendem Ziel wäre die Verfolgerbahn eine *logarithmische Spirale* mit dem Schnittwinkel σ). Im übrigen empfiehlt sich noch die Absonderung der Hundekurven mit rechtem Schielwinkel, so daß vorläufig vier Hauptkategorien zu unterscheiden sind:

1. $\varepsilon < 1$, $|\sigma| < 90^\circ$: „*Treffer*“. Der Verfolger erreicht das (unterlegene) Ziel im Endlichen. Die Isochronen sind Ellipsen.

2. $\varepsilon = 1$, $|\sigma| < 90^\circ$: „*Nachläufer*“. Der Verfolger erreicht das (ebenbürtige) Ziel erst im Unendlichen. Die Isochronen sind Parabeln.

3. $\varepsilon = 1$, $|\sigma| < 90^\circ$: „*Flüchter*“. Der Verfolger erreicht das (überlegene) Ziel nie, sondern entfernt sich von einem gewissen Zeitpunkt an immer mehr von ihm. Die Isochronen sind Hyperbeln.

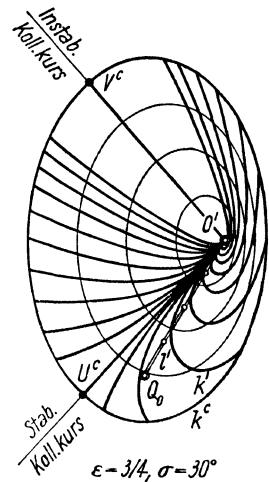


Abb. 5. Ähnlichkeitsschar von Hundekurven mit Isochronenkegelschnitten.

4. $|\sigma| = 90^\circ$: „*Querläufer*“. Der Verfolger läuft stets quer zur Peilrichtung, hat also keine Aussicht, das Ziel zu erreichen.

Ein zweites Einteilungsprinzip berücksichtigt die Realitätsverhältnisse der Berührungspunkte U , V von Trägerfläche Γ und Böschungsfernkreis d , die sich in der Doppelberührung zwischen dem Kegelschnitt k^c und dem Distanzkreis d^c widerspiegeln. Entscheidend ist nach Abb. 4 die Lage des Berührungspols W^c in bezug auf d^c , also der Betrag des Verhältniswertes

$$O'W^c : O'O = \frac{O'Q_0}{\sin \sigma} : O'O = \varepsilon : \sin \sigma.$$

Nach üblichem Sprachgebrauch wollen wir daher drei Unterfälle unterscheiden:

- a) $|\sin \sigma| < \varepsilon$: „*Hyperbolischer Fall*“. U und V sind reell-getrennt.
- b) $|\sin \sigma| = \varepsilon$: „*Parabolischer Fall*“. U und V sind zusammengedrückt.
- c) $|\sin \sigma| > \varepsilon$: „*Elliptischer Fall*“. U und V sind konjugiert-imaginär.

Durch Kombination der beiden Einteilungsrichtlinien gelangen wir so zu *acht reellen Typen*:

- 1a) Hyperbolischer Treffer; Abschn. 8.
- 1b) Parabolischer Treffer; Abschn. 10.
- 1c) Elliptischer Treffer; Abschn. 9.
- 2a) Nachläufer (schlechtweg); Abschn. 12.
- 3a) Flächter; Abschn. 11.
- 4a) Hyperbolischer Querläufer; Abschn. 14.
- 2b = 4b) Parabolischer Querläufer; Abschn. 15.
- 4c) Elliptischer Querläufer; Abschn. 13.

Diese Typen sollen nun anschließend in den genannten Abschnitten getrennt diskutiert werden, da sie unterschiedliche Behandlung verlangen.

Als Sonderklasse unter den hyperbolischen Hundekurven könnten noch die zu $\sigma = 0$ gehörigen „*gewöhnlichen Hundekurven*“ (ohne Schielwinkel) hervorgehoben werden, obwohl sie sich nach allem von den Hundekurven mit Schielwinkel nicht grundsätzlich, sondern nur durch gewisse Vereinfachungen abheben (vgl. Abschn. 16).

Die gegebene Einteilung kann natürlich auch auf die Relativbahnen im Zielsystem ausgedehnt werden.

8. Hyperbolischer Treffer

Für den in der Anwendung zunächst wichtigsten Fall des *hyperbolischen Treffers* soll nun die rechnerische Auswertung der bestehenden geometrischen Sachlage ausführlich entwickelt werden. Wie setzen also $v_P > v_Q > 0$ und zusätzlich $0 \leq \sin \sigma < \varepsilon = v_Q/v_P < 1$ voraus¹². Die Anfangssituation werde durch die Zieldistanz $P_0 Q_0 = r_0 > 0$ und den Richtungswinkel $l' Q_0 P_0 = \varphi_0$ in bezug auf den Zielkurs l' festgelegt (Abb. 4).

Für die Isochronenellipse k^e , deren numerische Exzentrizität bekanntlich den Wert ε hat, finden wir an Hand von Abb. 4 zunächst als Abstand des Brennpunkts Q_0 von der zugehörigen Leitlinie q

$$f = \frac{r_0}{\varepsilon} - r_0 \cdot \cos(\varphi_0 - \sigma), \quad (8.1)$$

und daraus ergibt sich die lineare Exzentrizität mit

$$e = \frac{\varepsilon^2 f}{1 - \varepsilon^2}. \quad (8.2)$$

Nun läßt sich aber sofort der Zielweg bis zum Zusammentreffen mit dem Verfolger in O' angeben und damit auch die entsprechende Treffzeit T . Aus

$$Q_0 O' = \frac{e}{\cos \sigma} = v_Q \cdot T = \varepsilon v_P \cdot T \quad (8.3)$$

folgt schließlich die wichtige *Treffzeitformel* von *Hosemann*:

$$T = \frac{r_0}{v_P} \cdot \frac{1 - \varepsilon \cos(\varphi_0 - \sigma)}{(1 - \varepsilon^2) \cos \sigma}, \text{ wobei } \varepsilon = v_Q/v_P. \quad (8.4)$$

Man sieht, daß sich unter den bestehenden Voraussetzungen stets eine endliche und positive Treffzeit einstellt.

Zwecks analytischer Darstellung der Verfolgerbahn machen wir jetzt den Schicksalspunkt O des Treffereignisses zum Ursprung eines *Normalkoordinatensystems*, dessen x - und y -Achse parallel zu den Achsenrichtungen der Ellipse k^e , also unter den Winkeln $90^\circ - \sigma$ bzw. σ gegen l' verlaufen mögen (Abb. 4); die senkrecht zur Grundebene π angeordnete Applikate z ist nach Abschn. 2 proportional zur Zeit τ :

¹² Die Beschränkung auf positive und wie immer spitze Schielwinkel geschieht nur, um die Vorstellung zu fixieren; die gewonnenen Formeln behalten ihre Gültigkeit aber auch für andere Werte.

$$z = v_P \cdot \tau. \quad (8.5)$$

Die Koordinaten x, y, z geben gleichzeitig homogene Koordinaten in der Fernebene ab.

Der *Böschungsfernkreis* d wird dann dargestellt durch

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad (8.6)$$

der Fernpunkt W durch

$$x_W : y_W : z_W = \varepsilon : 0 : \sin \sigma. \quad (8.7)$$

Die (reellen) Berührungspunkte U, V von d mit dem Kegel 2. Ordnung Γ bestimmen sich aus dem Berührungspol W zu

$$x_{U, V} : y_{U, V} : z_{U, V} = \sin \sigma : \pm w : \varepsilon \text{ mit } w = \sqrt{\varepsilon^2 - \sin^2 \sigma}. \quad (8.8)$$

Den *Trägerkegel* Γ selbst können wir nun in dem von dem Drehkegel (8.6) und der doppelt zählenden Ebene $OUV(\varepsilon x - z \sin \sigma = 0)$ aufgespannten Kegelnbüschel durch die Bedingung aussondern, daß die Schichtenellipsen $z = \text{const}$ die numerische Exzentrizität ε haben; wir erhalten so

$$(1 - \varepsilon^2)(x^2 + y^2 - z^2) + (\varepsilon x - z \sin \sigma)^2 = 0. \quad (8.9)$$

Schließlich notieren wir noch die Koordinaten des *Ausgangspunktes* P_0 , in deren Angabe die Treffzeit T gemäß (8.4) eingeht:

$$\begin{aligned} x_0 &= -v_Q T \cdot \sin \sigma + r_0 \cdot \sin(\sigma - \varphi_0), \\ y_0 &= -v_Q T \cdot \cos \sigma + r_0 \cdot \cos(\sigma - \varphi_0), \\ z_0 &= -v_P T. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Im Hinblick auf die die gesuchte Verfolger-Schicksalslinie k aus P_0 erzeugende Affinitätsgruppe \mathfrak{T}^n ist es zweckmäßig, deren Fixtetraeder $OUVW$ als Koordinatentetraeder zu verwenden, d. h. ein neues, *schiefwinkliges Koordinatensystem* ξ, η, ζ mit den Achsen OU, OV, OW einzuführen. Dies geschehe mittels der aus (8.8) und (8.7) fließenden Substitutionen

$$\begin{aligned} \xi &= x \sin \sigma - wy - \varepsilon z, & 2w^2 \cdot x &= -(\xi + \eta) \sin \sigma + 2\varepsilon \zeta, \\ \eta &= x \sin \sigma + wy - \varepsilon z, & 2w^2 \cdot y &= -w(\xi - \eta), \\ \zeta &= \varepsilon x - z \sin \sigma; & 2w^2 \cdot z &= -\varepsilon(\xi + \eta) + 2\zeta \sin \sigma. \end{aligned} \quad (8.11)$$

In den neuen Koordinaten schreibt sich jetzt der *Böschungsfernkreis* d

$$\xi \eta = \zeta^2 \quad (8.12)$$

und der *Trägerkegel* Γ

$$(1 - \varepsilon^2) \xi \eta = \zeta^2 \cdot \cos^2 \sigma. \quad (8.13)$$

Die neuen Koordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 von P_0 ergeben sich mittels (8.11) aus (8.10), sollen aber hier nicht eigens hingeschrieben werden.

Eine *Affinität* \mathfrak{A} , die das Tetraeder $OUVW$ eckenweise festläßt, kann nun angesetzt werden durch

$$\xi_1 = A \cdot \xi_0, \eta_1 = B \cdot \eta_0, \zeta_1 = C \cdot \zeta_0. \quad (8.14)$$

Bei wiederholter Anwendung von \mathfrak{A} tritt die Zählgröße als Exponent von A, B, C auf, und die eingliedrige *kontinuierliche Gruppe* läßt sich daher mittels eines Parameters t darstellen durch

$$\xi = e^{\alpha t} \cdot \xi_0, \eta = e^{\beta t} \cdot \eta_0, \zeta = e^{\gamma t} \cdot \zeta_0. \quad (8.15)$$

Diese Gleichungen geben gleichzeitig bereits die vom Punkt (ξ_0, η_0, ζ_0) durchlaufene *Bahnkurve* der Gruppe in Parameterform an, wobei wir uns unter diesem Punkt gleich unseren Ausgangspunkt P_0 vorstellen wollen.

Die Forderung nach *Invarianz des Kegels* Γ oder des Böschungsfernkreises d zieht für die Exponenten die Bedingung

$$\alpha + \beta = 2\gamma \quad (8.16)$$

nach sich. Ferner müssen wir noch verlangen, daß die Tangenten der durch (8.15) dargestellten Bahnkurve den Fernkreis d treffen, d. h. daß die Zuwächse $d\xi = \alpha\xi dt, d\eta = \beta\eta dt, d\zeta = \gamma\zeta dt$ unter der Voraussetzung (8.13) gemäß (8.12) die Beziehung $d\xi d\eta = d\zeta^2$ erfüllen. Dies führt auf die zweite Bedingung

$$\frac{\alpha\beta}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\gamma^2}{\cos^2 \sigma}. \quad (8.17)$$

Setzen wir etwa $\gamma = 1$, dann erhalten wir aus (8.16) und (8.17)

$$\alpha = 1 - n, \beta = 1 + n \text{ mit } n = w/\cos \sigma < 1. \quad (8.18)$$

Die richtige Vorzeichenverteilung kann dabei auf Grund von Abb. 3 und 4 in der Weise überprüft werden, daß man sich überzeugt, daß die Kollineation \mathfrak{A} , welche in der (durch homogene Koordinaten beschriebenen) Bildebene den Zentralriß $P^c(\xi : \eta : \zeta)$ eines Punktes $P(\xi, \eta, \zeta)$, in den Tangentenfluchtpunkt $T^c(d\xi : d\eta : d\zeta = \alpha\xi : \beta\eta : \gamma\zeta)$ überführt, auch den Brennpunkt $Q_0(x : y : z = \varepsilon \sin \sigma : \varepsilon \cos \sigma : 1)$ in den Kreismittelpunkt $O'(x : y : z = 0 : 0 : 1)$ transformiert.

Nun wollen wir noch den bequemerem Parameter

$$\vartheta = e^t \quad (8.19)$$

einführen und haben dann für die *Verfolger-Schicksalslinie* k die elegante Darstellung

$$\xi = \xi_0 \cdot \vartheta^{1-n}, \quad \eta = \eta_0 \cdot \vartheta^{1+n}, \quad \zeta = \zeta_0 \cdot \vartheta, \quad (8.20)$$

wobei ξ_0, η_0, ζ_0 die schiefwinkligen Koordinaten des Ausgangspunktes P_0 bedeuten. Man braucht jetzt nur vermöge (8.11) zu den Normalkoordinaten x, y, z zurückzukehren, deren erste zwei die *Hundekurve* k' beschreiben, während die dritte zufolge (8.5) durch $\tau = z/v_p$ den *Zeitablauf* regelt: Ortskoordinaten und Zeit werden dabei vom Treffereignis aus gezählt. Der Parameter ϑ hat das Intervall $1 \geq \vartheta \geq 0$ zu durchlaufen: $\vartheta = 1$ liefert die Ausgangsposition $x = x_0, y = y_0, \tau = -T$; $\vartheta = 0$ das Zusammentreffen $x = y = \tau = 0$; $\vartheta > 1$ ergäbe die Rückwärtsverlängerung.

Die *relative Verfolgerbahn* k^s im Zielsystem — d. i. die Parallelprojektion von k in Richtung l — stellt sich analytisch folgendermaßen dar:

$$\bar{x} = x - \varepsilon z \cdot \sin \sigma, \quad \bar{y} = y - \varepsilon z \cdot \cos \sigma. \quad (8.21)$$

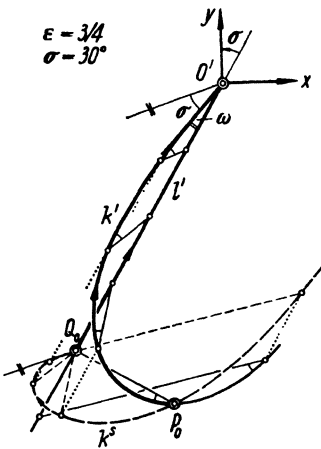


Abb. 6. Hyperbolischer Treffer.

Abb. 6 zeigt das Aussehen der absoluten und der relativen Verfolgerbahn im Falle des hyperbolischen Treffers. Q_0 stellt, wie leicht einzusehen, einen Brennpunkt von k^s dar.

Wie (8.20) lehrt, kommen unter den vorliegenden W -Kurven und damit auch unter den absoluten und relativen Hundekurven *algebraische Linien* vor, nämlich für rationale Werte von n (hier stets < 1). Schreibt man $n = \mu/\nu$ als gekürzten Bruch an, so gibt $\mu + \nu$ die *Ordnung* an. Der einfachste nicht-triviale Fall liegt für $n = 1/2$ vor, der auf kubische Bahnkurven führt.

Besonders hervorzuheben sind die bei jedem n vorhandenen *geradlinigen Verfolgerbahnen*, die auftreten, wenn speziell $\zeta_0 = 0$ ist, was wegen (8.13) auch $\eta_0 = 0$ oder $\xi_0 = 0$ bedingt. Die zugehörigen Schicksalslinien fallen mit den invarianten Kegelerzeugenden OU bzw. OV zusammen. *Hosemann*² spricht im ersten Fall vom „*stabilen Kollisionskurs*“, im zweiten vom „*instabilen*“, was mit dem Verhalten der übrigen

(krummen) Verfolgerbahnen zusammenhängt: dieselben nähern sich nämlich in zunehmendem Maße dem stabilen Kollisionskurs und münden im Treffpunkt berührend in diesen ein, treffen mithin das Ziel allesamt von achtern und unter demselben Winkel ω ; die einzige Ausnahme bildet der instabile Kollisionskurs, der das Ziel von vorn, und zwar unter dem Winkel $\omega + 2\sigma$ trifft (vgl. Abb. 5 u. 6). Dieses Verhalten ist aus den Gleichungen (8.20) für $\vartheta \rightarrow 0$ abzulesen. Der Wert des *Treffwinkels* ω ist auf Grund des Sinussatzes leicht aus

$$\sin(\omega + \sigma) : \sin \sigma = 1 : \varepsilon \quad (8.22)$$

zu berechnen. — Die beiden Kollisionskurse zerlegen die Ebene in zwei Sektoren (Abb. 5). Zwei im selben Sektor verlaufende Hundekurven sind jeweils reell-ähnlich, zwei Bahnen aus verschiedenen Sektoren hängen hingegen durch eine komplexe (zentrische) Ähnlichkeit zusammen, was aus dem analogen Verhalten der entsprechenden *W*-Kurven im Raumdiagramm folgt (vgl. Satz 5).

9. Elliptischer Treffer

In diesem durch $0 < \varepsilon = v_Q/v_P < \sin \sigma < 1$ gekennzeichneten Fall sind die Berührungspunkte *U*, *V* des Kegels Γ mit dem ihn umschließenden Böschungsfernkreis *d* konjugiert-imaginär, so daß die zugehörigen Böschungslinien *k* auf Γ der Kegelspitze *O* in Spiralenform zustreben. Diese Böschungslinien sind *affin* zu den wohlbekannten *zylindro-konischen Spiralen* (Bahnkurven räumlicher Ähnlichkeitsgruppen¹³), denn sie gehen in diese über, wenn man einen der im Büschel (*c*, *d*) enthaltenen nullteiligen Kegelschnitte durch eine geeignete Affinität in den absoluten Kugelkreis transformiert. *Die Verfolgerbahnen im Falle des elliptischen Treffers sind demnach „abnehmende Laufmusterkurven“, die durch Parallelprojektion von zylindro-konischen Spiralen erhalten werden können.*

Während die relative Verfolgerbahn im Zielsystem stets die Gestalt einer mehr oder weniger verzerrten Spirale hat, können bei der Hundekurve im ruhenden System *drei Spielarten* unterschieden werden, je nachdem der Treffpunkt *O'* außerhalb, auf oder innerhalb der Isochronenellipsen liegt, was davon abhängt, ob $\varepsilon \stackrel{>}{\approx} \cos \sigma$ ist. Im ersten Fall nähert sich der Verfolger in unendlich vielen, untereinander ähn-

¹³ *W. Wunderlich*: Darstellende Geometrie der Spiralf lächen. Monatsh. Math. Phys. 46 (1938), 248—265.

lichen Schleifen dem Treffpunkt von einer Seite her (Abb. 7) und verbleibt innerhalb eines von den Umrißerzeugenden des Kegels F begrenzten Winkelraums von der Größe 2γ , wobei $\varepsilon \sin \gamma = \cos \sigma$; im zweiten Fall geht die Hundekurve unendlich oft durch den späteren Treffpunkt

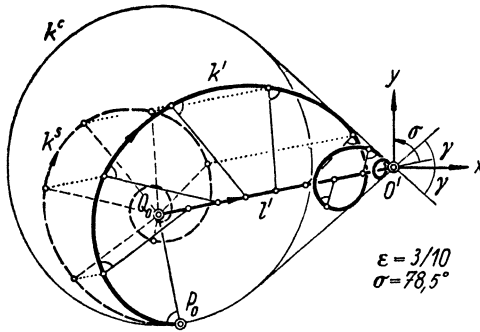


Abb. 7. Elliptischer Treffer.

O' , wo die immer kleiner werdenden Schlingen einander berühren; im dritten Fall schließlich umkreist der Verfolger sein Ziel und den Treffpunkt in einer immer enger werdenden Spirale. In keinem Fall kann von einem bestimmten Treffwinkel gesprochen werden. Auch geradlinige Kollisionskurse sind reell

nicht vorhanden. Demzufolge sind hier alle Hundekurven mit demselben Geschwindigkeitsverhältnis und demselben Schielwinkel untereinander reell-ähnlich.

Führt man die analytische Behandlung des elliptischen Treffers nach dem Muster des hyperbolischen durch, so fallen zunächst die dort in (8.8) und (8.18) eingeführten Hilfsgrößen w und n rein-imaginär aus. Um im Reellen zu bleiben, wird man daher unter Verwendung der Ersatzgröße $v = \sqrt{\sin^2 \sigma - \varepsilon^2}$ zu passenden neuen Koordinaten X, Y, Z übergehen:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} (\xi + \eta) = x \sin \sigma - \varepsilon z, & v^2 x &= X \sin \sigma - \varepsilon Z, \\ Y &= \frac{1}{2i} (\xi - \eta) = -v y, & v^2 y &= -v Y, \\ Z &= \zeta = \varepsilon x - z \sin \sigma; & v^2 z &= \varepsilon X - Z \sin \sigma. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Unter Ausnutzung der *Eulerschen* Identität folgt dann aus (8.15) und (8.18) für die Verfolger-Schicksalslinie k die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} X &= e^{-\theta/m} (X_0 \cos \theta - Y_0 \sin \theta) \\ Y &= e^{-\theta/m} (X_0 \sin \theta + Y_0 \cos \theta) \\ Z &= e^{-\theta/m} \cdot Z_0 \end{aligned} \quad \text{mit } m = v/\cos \sigma, \quad (9.2)$$

wobei $-mt = \theta$ gesetzt wurde. Die hieraus mittels (9.1) ableitbare Darstellung in kartesischen Koordinaten gibt dann wieder durch x, y die Verfolgerbahn und durch $z = v_p \cdot \tau$ den zeitlichen Ablauf.

Eine Änderung des Parameterwinkels θ um 2π bewirkt eine die Kurve k in sich selbst transformierende zentrische Streckung im Verhältnis $e^{2\pi/m}$ vom Ursprung aus: Auch die Hundekurve k' gestattet daher solche automorphen Streckungen vom Treffpunkt aus, wie sie den „abnehmenden Laufmusterkurven“ eigen sind.

Deutet man X, Y, Z selbst als Normalkoordinaten, so stellt (9.2) eine der oben erwähnten zylindro-konischen Spiralen dar, die zu k affin sind. Eine solche Spirale selbst tritt als Schicksalslinie bei ruhendem Ziel auf ($\varepsilon = 0$).

10. Parabolischer Treffer

Dieser durch $0 < \varepsilon = v_Q/v_P = \sin \sigma < 1$ gekennzeichnete Grenzfall zwischen hyperbolischem und elliptischem Treffer liegt vor, wenn die Berührungspunkte U, V von Γ und d zusammengerückt sind. Die beiden geradlinigen Kollisionskurse sind hier vereinigt und treffen den Zielkurs unter dem Winkel $\omega = 90^\circ - \sigma$. Alle krummen Verfolgerbahnen mit demselben Schielwinkel (und Geschwindigkeitsverhältnis) sind untereinander reell-ähnlich.

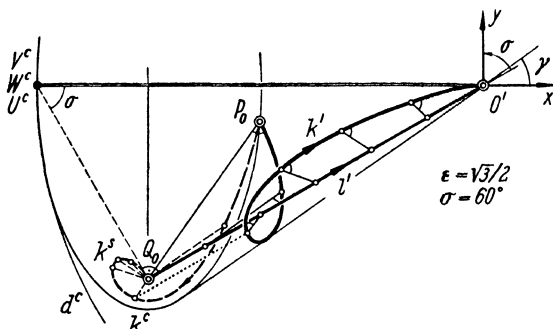


Abb. 8. Parabolischer Treffer.

Die analytische Behandlung erfordert eine gewisse Modifikation des bisherigen Musters, da das Fixtetraeder der Affinitätsgruppe \mathfrak{T}^n ausgeartet ist. Geht man zunächst vermöge

$$\begin{aligned} X &= x + z, & x &= \frac{1}{2}(X - Z), \\ Y &= y, & y &= Y, \\ Z &= -x + z; & z &= \frac{1}{2}(X + Z) \end{aligned} \quad (10.1)$$

zu neuen Koordinaten über, in welchen die invarianten Fernkegelschnitte durch

$$XZ - Y^2 + \lambda Z^2 = 0 \quad (10.2)$$

dargestellt werden, dann reduziert sich das eine infinitesimale Transformation der Gruppe definierende linear-homogene Gleichungssystem auf

$$\frac{dX}{dt} = X - 2cY, \quad \frac{dY}{dt} = Y - cZ, \quad \frac{dZ}{dt} = Z \quad \text{mit } c = \operatorname{tg} \sigma. \quad (10.3)$$

Integration dieses Systems liefert dann die W -Kurve k , die sich nach Übergang zum neuen Parameter

$$\vartheta = -ct \quad (10.4)$$

folgendermaßen schreibt:

$$\begin{aligned} X &= e^{-\vartheta/c}(X_0 + 2\vartheta Y_0 + \vartheta^2 Z_0), \\ Y &= e^{-\vartheta/c}(Y_0 + \vartheta Z_0), \\ Z &= e^{-\vartheta/c} \cdot Z_0; \end{aligned} \quad (10.5)$$

X_0, Y_0, Z_0 sind dabei die gemäß (10.1) zu berechnenden Neukoordinaten des Ausgangspunktes $P_0(\vartheta = 0)$. Von der Darstellung (10.5) der Verfolger-Schicksalslinie hat man dann vermöge (10.1) wieder zu den alten Koordinaten $x, y, z = v_P \tau$ zurückzukehren, welche den örtlichen und zeitlichen Ablauf der Verfolgung beschreiben, die mit $\vartheta = \infty$ ihr Ende findet.

11. Flüchter

Diese durch $\varepsilon = v_Q/v_P > 1$ gekennzeichnete Annahme führt auf *hyperbolische Isochronen* und weist stets ein reelles Fixtetraeder $OUVW$

auf, so daß hier Entwicklung und Formeln aus Abschn. 8 weitgehend übernommen werden können. Der ausschlaggebende Unterschied gegenüber dem hyperbolischen Treffer liegt lediglich darin, daß der Exponent $n = w/\cos \sigma$ jetzt stets größer als 1 ausfällt, was entscheidenden Einfluß auf den Verlauf der W -Kurven hat: Diese kommen jetzt wohl ebenfalls aus dem Fernpunkt

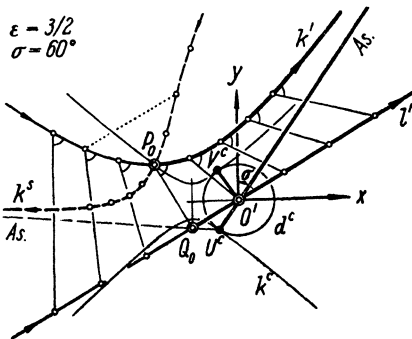


Abb. 9. Flüchter.

$V(\vartheta = \infty)$, münden jedoch nicht in der Kegelspitze O , sondern im Fernpunkt $U(\vartheta = 0)$. Nähere Betrachtung zeigt, daß die Tangente

in V die Ferngerade VW ist, während in U die Tetraederkante UO berührt wird. Die Hundekurve „flüchtet“ daher längs der Asymptote $O'U^c$ ins Unendliche hinaus, während ihre Rückwärtsverlängerung einen parabolischen Ast in Richtung $O'V^c$ entsendet (Abb. 9). Der Punkt O' wird vollkommen vermieden und spielt daher im allgemeinen nicht mehr die Rolle eines Treffpunkts, der, von einer einzigen Ausnahme abgesehen, gar nicht existiert. Die erwähnte Ausnahme bezieht sich auf den „labilen Kollisionskurs“ $O'V^c$: In dem besonderen Fall, daß der Verfolger diese gerade Bahn durchläuft, kommt trotz unterlegener Geschwindigkeit ein Zusammentreffen (in O') zustande.

Für rationale Werte des Exponenten $n = \mu/\nu > 1$ treten wieder *algebraische Hundekurven* auf, und zwar von der Ordnung 2μ . Die niedrigste mögliche Ordnung ist mithin 4 (für $n = 2$).

12. Nachläufer

Wir können die durch $\sin \sigma < \varepsilon = 1$ gekennzeichnete Annahme als Grenzfall des hyperbolischen Treffers auffassen: Der Isochronenkegelschnitt k^c ist jetzt eine *Parabel*, die durch ihren Brennpunkt Q_0 , den Punkt P_0 und die gegen l' um σ abweichende Achsenrichtung gegeben ist; ihr Parameter berechnet sich gemäß Abb. 10 mit

$$p = r_0[1 - \cos(\sigma - \varphi_0)]. \quad (12.1)$$

Das Projektionszentrum O ist in den Fernpunkt der Ziel-Schicksalsgerade l hinausgerückt, die Trägerfläche $\Gamma = Ok^c$ der Böschungslinie

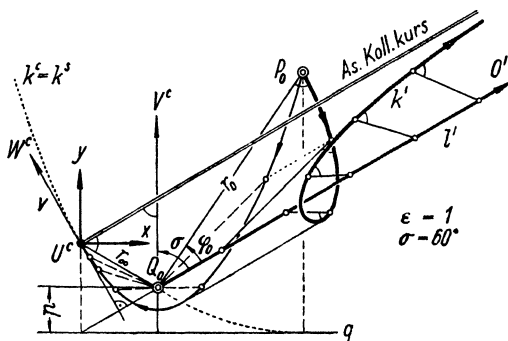


Abb. 10. Nachläufer.

k wird damit zu einem *parabolischen Zylinder* und der Distanzkreis d^c artet in die Ferngerade u und die zu l' normale Parabeltangente v aus.

Wir verschieben das bisher verwendete Koordinatensystem x, y, z mit seinem Ursprung in den Berührungspunkt U^c der Parabeltangente v (Abb. 10). Die Isochronenparabel k^c besitzt dann die Parameterdarstellung:

$$x = t, \quad y = \frac{t^2}{2p} - t \cdot \operatorname{tg} \sigma, \quad z = 0, \quad (12.2)$$

und die Ausgangsposition P_0 hat die Koordinaten

$$x_0 = p \operatorname{tg} \sigma + r_0 \sin(\sigma - \varphi_0), \quad y_0 = \frac{p}{2}(1 - \operatorname{tg}^2 \sigma) + r_0 \cos(\sigma - \varphi_0), \quad z_0 = 0. \quad (12.3)$$

Wir gehen nun zu einem der Aufgabe besser angepaßten, schiefwinkligen Koordinatensystem ξ, η, ζ über, indem wir die bereits bewährten Transformationsgleichungen (8.11) heranziehen, die jetzt mit $\varepsilon = 1$ und $w = \cos \sigma$ folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned} \xi &= x \sin \sigma - y \cos \sigma - z, & 2 \cos^2 \sigma \cdot x &= -(\xi + \eta) \sin \sigma + 2 \zeta, \\ \eta &= x \sin \sigma + y \cos \sigma - z, & 2 \cos^2 \sigma \cdot y &= -(\xi - \eta) \cos \sigma, \\ \zeta &= x - z \sin \sigma; & 2 \cos^2 \sigma \cdot z &= -(\xi + \eta) + 2 \zeta \sin \sigma. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Die ξ -Achse gibt die Erzeugendenrichtung des Zylinders Γ an, dessen Gleichung daher nur die Veränderlichen η und ζ enthalten wird; sie ergibt sich aus (12.2) und (12.4) mit

$$2p\eta = \zeta^2 \cos \sigma. \quad (12.5)$$

Die 45°-Böschungslinien auf Γ sind durch $dx^2 + dy^2 = dz^2$ oder

$$d\xi \cdot d\eta = d\zeta^2 \quad (12.6)$$

gekennzeichnet, wobei die Erzeugenden als triviale Lösungen ausscheiden. Aus (12.5) und (12.6) findet man durch elementare Integration für die durch P_0 gehende Böschungslinie, also die *Verfolger-Schicksalslinie* k , die Darstellung

$$\xi = \xi_0 - \vartheta, \quad \eta = \eta_0 e^{-2\vartheta/c}, \quad \zeta = \zeta_0 e^{-\vartheta/c} \quad \text{mit } c = p/\cos \sigma, \quad (12.7)$$

wobei die Koordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 von P_0 aus (12.3) mittels (12.4) zu berechnen sind. Aus (12.7) erhält man dann gleichfalls mittels (12.4) die Ortskoordinaten x, y des Verfolgers und die von der Ausgangssituation aus gezählte Zeit $\tau = z/v_p$.

Die Nachläufer-Hundekurve ist demnach — abgesehen vom Sonderfall $\eta_0 = \zeta_0 = 0$ — stets transzendent. Sie kommt nach Art einer Parabel aus dem Unendlichen ($\vartheta = -\infty$) und läuft dann asymptotisch längs der durch U^c gehenden Parallelen zur Zielbahn l' wieder ins

Unendliche hinaus ($\vartheta = +\infty$); der Verfolger strebt dabei dem Ziel gegenüber in eine Grenzposition, die der Lage von U^c gegen Q_0 entspricht ($r_\infty = \lim Q' P' = Q_0 U^c = p/2 \cos^2 \sigma$, $\varphi_\infty = \pi - \sigma$).

Die relative Verfolgerbahn k^s im Zielsystem fällt mit der Parabel k^c zusammen.

13. Elliptischer Querläufer

Die Annahme $\sigma = \pi/2$, $\varepsilon < 1$ läßt sich durch Grenzübergang aus dem elliptischen Treffer (Abschn. 9) herleiten. Die Grundisochrone k^c ist eine *Ellipse* mit Q_0 als Brennpunkt, zu l' normaler Hauptachse und der numerischen Exzentrizität ε (Abb. 11); die große Halbachse a berechnet sich aus den Daten der Ausgangsposition gemäß

$$a = r_0 \cdot \frac{1 - \varepsilon \sin \varphi_0}{1 - \varepsilon^2}. \quad (13.1)$$

Der Begegnungs-Schicksalspunkt O fällt ins Unendliche — auch die Treffzeitformel (8.4) liefert $T = \infty$ —, die Trägerfläche $\Gamma = Ok^c$ wird mithin zu einem *l-parallelen elliptischen Zylinder*.

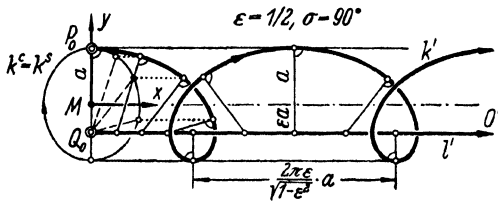


Abb. 11. Elliptischer Querläufer.

Verschieben wir das kartesische Koordinatensystem x, y, z mit seinem Ursprung in den Mittelpunkt der Basisellipse k^c und führen wir in Anlehnung an (9.1) die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} X &= x - \varepsilon z, & v^2 x &= X - \varepsilon Z, \\ Y &= -vy, & v^2 y &= -v Y, \\ Z &= \varepsilon x - z, & v^2 z &= \varepsilon X - Z \end{aligned} \quad (13.2)$$

durch, wobei $v^2 = 1 - \varepsilon^2$, so erhält der Zylinder Γ die Gleichung

$$X^2 + Y^2 = (1 - \varepsilon^2) a^2 = b^2, \quad (13.3)$$

und die interessierenden 45°-Böschungslinien sind neuerlich durch

$$dX^2 + dY^2 = dZ^2 \quad (13.4)$$

gekennzeichnet. Deuten wir vorübergehend X, Y, Z als Normalkoordinaten, so definieren die Gleichungen (13.3) und (13.4) *gewöhnliche Schraublinien*, die sich (mit Unterdrückung des nicht in Betracht kommenden Vorzeichens) sofort hinschreiben lassen:

$$X = X_0 \cos \theta - Y_0 \sin \theta, \quad Y = X_0 \sin \theta + Y_0 \cos \theta, \quad Z = Z_0 - b \theta. \quad (13.5)$$

Setzen wir hierin für X_0, Y_0, Z_0 die Neukoordinaten des Ausgangspunktes P_0 , die sich mittels (13.2) aus den alten Koordinaten

$$x_0 = r_0 \cos \varphi_0, \quad y_0 = r_0 \sin \varphi_0 - \varepsilon a, \quad z_0 = 0 \quad (13.6)$$

berechnen, so stellt (13.5) die Verfolger-Schicksalslinie k dar. Dieselbe ist offenbar eine *affine Schraublinie*, ihr Grundriß, die *Hundekurve* k' , mithin eine *affin gestreckte verschlungene Radlinie*. Nehmen wir wie in Abb. 11 insbesondere $\varphi_0 = \pi/2$, dann schreibt sich die Hundekurve

$$x = \frac{a}{v} (\sin \theta + \varepsilon \theta), \quad y = a \cos \theta; \quad (13.7)$$

hieraus entnimmt man die Periodenlänge $2\pi\varepsilon a/v$ und den Streckfaktor $1/v$ der Radlinie in Laufrichtung. — Der Verfolger umkreist sein Ziel ständig in einer *Kepler-Ellipse* $k^s = k^c$, ohne es — trotz überlegener Geschwindigkeit — im Endlichen zu erreichen.

14. Hyperbolischer Querläufer

Die Annahme $\sigma = \pi/2$. $\varepsilon > 1$ läßt sich als Grenzfall eines Flüchters (Abschn. 11) ansehen. Die Grundisochrone k^c ist eine *Hyperbel* mit Q_0 als

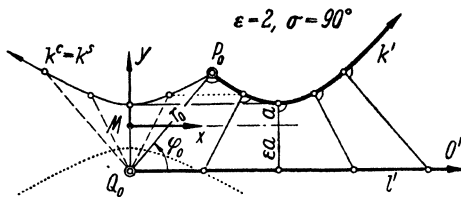


Abb. 12. Hyperbolischer Querläufer.

Brennpunkt, zu l' normaler Hauptachse und der numerischen Exzentrizität ε ; die Halbachse berechnet sich auf Grund der Polargleichung gemäß

$$a = \pm r_0 \frac{\varepsilon \sin \varphi_0 - 1}{\varepsilon^2 - 1}, \quad (14.1)$$

wobei das Vorzeichen so zu wählen ist, daß $a > 0$ ausfällt. Das Projektionszentrum O rückt wieder ins Unendliche, so daß die Trägerfläche $\Gamma = Ok^c$ ein *hyperbolischer Zylinder* mit der Erzeugendenrichtung l wird. — Verschieben wir das kartesische Koordinatensystem x, y, z mit seinem Ursprung ins Hyperbelzentrum und führen wir entsprechend (8.11) die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} \xi &= x - wy - \varepsilon z, & 2w^2 x &= -(\xi + \eta) + 2\varepsilon\zeta, \\ \eta &= x + wy - \varepsilon z, & 2w^2 y &= -w(\xi - \eta), \\ \zeta &= \varepsilon x - z; & 2w^2 z &= -(\xi + \eta) + 2\zeta \end{aligned} \quad (14.2)$$

mit $w^2 = \varepsilon^2 - 1$ durch, so erhält der Zylinder Γ die Gleichung

$$\xi\eta = (1 - \varepsilon^2)a^2 = -b^2, \quad (14.3)$$

und seine 45°-Böschungslinien werden durch

$$d\xi \cdot d\eta = d\zeta^2 \quad (14.4)$$

gekennzeichnet. Elementare Integration liefert für die *Verfolger-Schicksalslinie* k die Parameterdarstellung

$$\xi = \xi_0 e^\vartheta, \quad \eta = \eta_0 e^{-\vartheta}, \quad \zeta = \zeta_0 \pm b\vartheta, \quad (14.5)$$

wobei ξ_0, η_0, ζ_0 die vermöge (14.2) aus

$$x_0 = r_0 \cos \varphi_0, \quad y_0 = r_0 \sin \varphi_0 \mp \varepsilon a, \quad z_0 = 0 \quad (14.6)$$

zu bestimmenden Neukoordinaten des Ausgangspunktes P_0 sind. Die W -Kurve k kann als *pseudoeuclidische Schraublinie* aufgefaßt werden.

Die Hundekurve k' ist transzendent und zeigt die typische Erscheinung des Flüchters, besitzt aber eine Symmetrieachse und keine Asymptote (Abb. 12). Je nach dem geltenden Vorzeichen können zwei Formen unterschieden werden, zu denen alle Querläufer mit demselben Geschwindigkeitsverhältnis ε reell-ähnlich sind. Nimmt man $\varphi_0 = \pm \pi/2$ an, so erhalten die Darstellungen die Form

$$x = \frac{a}{w} (\operatorname{sh} \vartheta \pm \varepsilon \vartheta), \quad y = a \cdot \operatorname{ch} \vartheta. \quad (14.7)$$

Bei Abb. 12 gilt das obere Vorzeichen; zum unteren gehört eine Bahnform vom Charakter der Abb. 13. — Die relative Verfolgerbahn k^c im Zielsystem ist ein Ast der *Hyperbel* k^c .

15. Parabolischer Querläufer

Die Annahme $\sigma = \pi/2, \varepsilon = 1$ stellt einen Grenzfall des (hyperbolischen) Nachläufers dar (Abschn. 12). Die Grundisochrone k^c ist eine *Parabel* mit dem Brennpunkt Q_0 und zu l' normaler Achse, deren Parameter sich aus den Anfangsdaten mit

$$p = r_0(1 - \sin \varphi_0) \quad (15.1)$$

berechnet (Abb. 13). Das Projektionszentrum O befindet sich wieder im Fernpunkt der Ziel-Schicksalslinie l , so daß die Trägerfläche $\Gamma = Ok^c$ ein l -paralleler, unter 45° ansteigender *parabolischer Zylinder* wird,

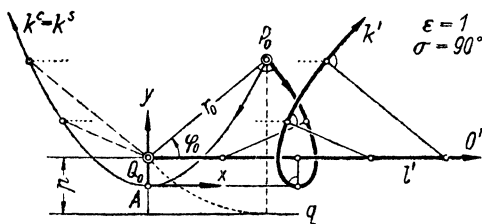


Abb. 13. Parabolischer Querläufer.

dessen krumme 45° -Böschungslinien die gesuchte Verfolger-Schicksalslinie k enthalten. — Für die Rechnung verlegen wir den Ursprung des Normalkoordinatensystems x, y, z in den Parabelscheitel. Nach Durchführung der Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} p X &= x + z, & 2x &= p(X - Z), \\ p Y &= y, & 2y &= 2pY, \\ p Z &= -x + z; & 2z &= p(X + Z), \end{aligned} \quad (15.2)$$

welche $p \neq 0$, also $\varphi_0 \neq \pi/2$ voraussetzt, nimmt der Zylinder Γ die Gleichung

$$Z^2 = 2Y \quad (15.3)$$

an. Die interessierenden Böschungslinien werden gekennzeichnet durch

$$dX \cdot dZ = dY^2. \quad (15.4)$$

Elementare Integration führt auf die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} X &= X_0 + 2Y_0 \vartheta + Z_0 \vartheta^2 + \frac{1}{3} \vartheta^3, \\ Y &= Y_0 + Z_0 \vartheta + \frac{1}{2} \vartheta^2, \\ Z &= Z_0 + \vartheta. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Hierin sind X_0, Y_0, Z_0 die mittels (15.2) aus

$$x_0 = r_0 \cos \varphi_0, \quad y_0 = r_0 - \frac{1}{2} p, \quad z_0 = 0 \quad (15.6)$$

zu bestimmenden Neukoordinaten der Ausgangssituation.

Die durch (15.5) beschriebenen *Raumkurven 3. Ordnung* können als *affine Grenzschaublinien* angesehen werden¹⁴. Sie sind die Bahnkurven

¹⁴ W. Wunderlich: Über eine affine Verallgemeinerung der Grenzschaubung. Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien 144 (1935), 111—129.

einer eingliedrigen, kontinuierlichen Affinitätsgruppe, deren Fixtetraeder vollkommen ausgeartet ist: Einziger Fixpunkt ist der Fernpunkt O , einzige Fixgerade die Fernerzeugende von Γ , einzige Fixebene die Fernebene. — Die Hundekurve k' erhält die einfachste Darstellung, wenn man $\varphi_0 = 270^\circ$, $r_0 = p/2$ voraussetzt, weil dann sämtliche Anfangskoordinaten verschwinden. Aus $X = \vartheta^3/3$, $Y = \vartheta^2/2$, $Z = \vartheta$ folgt dann als Normalform der Bahngleichung

$$x = \frac{p}{6} (\vartheta^3 - 3 \vartheta), \quad y = \frac{p}{2} \vartheta^2 \quad \text{oder} \quad \frac{9p}{2} x^2 = y(y - \frac{3p}{2})^2. \quad (15.7)$$

Diese Kurve ist unter dem Namen „*Tschirnhaus-Kubik*“ bekannt. Zu ihr sind alle parabolischen Querläufer ähnlich, wenn man den trivialen Sonderfall $p = 0$ ausnimmt, bei welchem der Verfolger querab vom Ziel steht und dieselbe Laufrichtung hat ($\varphi_0 = \pi/2$): Unter diesen Umständen begleitet er das Ziel auf einer parallelen Geraden.

16. Gewöhnliche Hundekurven

Die zu $\sigma = 0$ gehörigen „*gewöhnlichen Hundekurven*“ lassen sich entsprechend $\varepsilon \leq 1$ unter die hyperbolischen Treffer (Abschn. 8), Nachläufer (Abschn. 12), bzw. Flüchtler (Abschn. 11) einreihen. Die dort entwickelten Formeln und Gleichungen können ohne weiteres übernommen werden, wobei lediglich gewisse Vereinfachungen eintreten.

Im Falle des Treffers oder Flüchtlers ($\varepsilon \neq 1$) wird zufolge (8.8) und (8.18) $w = n = \varepsilon$, und mit Rücksicht auf die vereinfachten Transformationsgleichungen (8.11) lassen sich die Gleichung der Hundekurve und der zeitliche Ablauf der Verfolgung unschwer in den ursprünglichen Koordinaten hinschreiben¹⁵:

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{C^{-1}}{1 - \varepsilon} \cdot x^{1-\varepsilon} - \frac{C}{1 + \varepsilon} \cdot x^{1+\varepsilon} \right) \quad \text{mit} \quad C = \frac{(1+\varepsilon)(z_0 - y_0)}{x_0^{1+\varepsilon}},$$

$$v_P \tau = z = \frac{1}{2} \left(\frac{C^{-1}}{1 - \varepsilon} \cdot x^{1-\varepsilon} + \frac{C}{1 + \varepsilon} \cdot x^{1+\varepsilon} \right) \quad (16.1)$$

Der *Treffer* ($\varepsilon < 1$) mündet in die Zielbahn l' berührend ein ($\omega = 0$), erreicht also das Ziel genau von achtern¹⁶; der *Flüchtler* ($\varepsilon > 1$) nähert

¹⁵ Vgl. etwa G. Loria - F. Schütte: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven II, 243.

¹⁶ Dieser Umstand gab seinerzeit den Anlaß zur Einführung eines Schielwinkels.

sich der Zielbahn asymptotisch, bleibt aber hinter dem Ziel immer mehr zurück. Die Isochronen sind konzentrische Ellipsen bzw. Hyperbeln.

Im Falle des *Nachläufers* ($\varepsilon = 1$) wird gemäß (12.7) $c = p$ und die vereinfachten Transformationsformeln (12.4) liefern das Ergebnis¹⁵

$$y = \frac{x^2}{2p} - \frac{p}{2} \ln x + C \quad \text{mit } C = \frac{x_0^2}{2p} + \frac{p}{2} \ln x_0. \quad (16.2)$$

$$v_p \tau = z = -\frac{x^2}{2p} - \frac{p}{2} \ln x + C$$

Die Bahnkurve nähert sich asymptotisch dem Zielkurs l' , der Verfolger bleibt aber im endlichen Grenzabstand $r_\infty = p/2$ hinter dem Ziel zurück. Die Isochronen sind kongruente und koachsiale Parabeln.

17. Bahnkrümmung

Technische Realisierungen des Verfolgers, wie beispielsweise ziel-suchende Geschosse, besitzen stets nur ein mehr oder weniger beschränktes Wendevermögen. Dies hat zur Folge, daß die Verfolgungsbahnen praktisch nur soweit mit den berechneten übereinstimmen können, als deren Krümmungsradius einen gewissen Minimalwert nicht unterschreitet, und hieraus ist die besondere Bedeutung zu ermessen, die der Untersuchung der *Bahnkrümmung* zukommt.

Zur Ableitung einer einfachen *Krümmungskonstruktion* für die Bahnkurven denken wir uns den Peilstrahl $P'Q'$ gemäß Abb. 14 durch einen Stab ersetzt, der in P' mit dem begleitenden Zweibein der Verfolgungskurve starr verbunden ist und mittels eines Schlitzes vom Ziel Q' gesteuert wird. Nach einem bekannten Hilfssatz der Kinematik fällt dann die gesuchte Krümmungsmittle mit dem *Momentanzentrum* M des Stabes (Zweibeins) zusammen, und dieses kann bei Kenntnis der momentanen Geschwindigkeitsvektoren v_p und v_q leicht gefunden werden. Man geht zu diesem Zweck zunächst durch Viertelschwenkung zu den bequemeren „gedrehten Geschwindigkeitsvektoren“ v_p^\times und v_q^\times über und ermittelt sodann den gedrehten Geschwindigkeitsvektor v_R^\times jenes Punktes R' der Stabachse, der sich gerade in Q' befindet: Die Endpunkte der Vektoren v_R^\times und v_p^\times liegen auf einer Parallelen zur Stabachse (da die Geschwindigkeitsbeträge zu den Abständen vom Momentanzentrum proportional sind), während die Endpunkte der Vektoren v_R^\times und v_q^\times eine zur Stabachse normale Strecke aufspannen müssen (die der in die Stabachse fallenden Relativgeschwindigkeit von R' gegen Q' entspricht). Im Schnitt der durch die Vektoren v_p^\times und v_R^\times angezeigten

Bahnnormalen hat man dann das Momentan- und *Bahnkrümmungszentrum* M^{17} .

Bezeichnet r die Peilstrecke $Q'P'$ und φ den Peilwinkel gegen den Zielkurs, dann gilt für den *Bahnkrümmungsradius* ϱ die nachstehende, an Hand von Abb. 14 leicht abzuleitende Formel:

$$\varrho = \frac{r}{\sin \sigma - \varepsilon \sin \varphi}. \quad (17.1)$$

Als Grundrisse von Böschungslinien sind die hier behandelten Hundekurven durchwegs *einsinnig gekrümmt*. Dies geht auch aus der Krümmungsformel (17.1) hervor: Verschwindet die Krümmung, dann ist $\sin \varphi : \sin \sigma = 1 : \varepsilon = v_P : v_Q$ und der Verfolger läuft auf einem geraden Kollisionskurs.

Entscheidend für die Möglichkeit einer ungestörten Verfolgungsbahn ist vor allem die „*Treffkrümmung*“ $\kappa_0 = 1/\varrho_0$, d. h. die Krümmung der Hundekurve im Treffpunkt O' . Im Falle des *hyperbolischen Treffers* erkennt man aus der Parameterdarstellung (8.20) der Schicksalslinie k , deren Krümmung in O im wesentlichen von der Größe $\zeta/\xi^2 \sim \vartheta^{2n-1}$ abhängt, daß auch

$$\kappa_0 \begin{cases} = 0 & \text{für } n > 1/2 \text{ (Abb. 6),} \\ \neq 0, \neq \infty & \text{für } n = 1/2 \text{ (kubische Hundekurven),} \\ = \infty & \text{für } n < 1/2 \text{ (Abb. 1).} \end{cases} \quad (17.2)$$

Auch beim *parabolischen und elliptischen Treffers* ist $\kappa_0 = \infty$; im ersten Fall folgt dies mit $n \rightarrow 0$ aus (17.2), im zweiten aus den sich auf den Treffpunkt zusammenziehenden Schleifen (Abb. 7). Ein ungestörter Bahnverlauf kann demnach nur für $n \geq 1/2$, d. h. für $4\varepsilon^2 \geq 1 + 3\sin^2\sigma$ erwartet werden, und diese Bedingung verlangt $v_Q < v_P \leq 2v_Q$, also verhältnismäßig langsame Verfolger¹⁸.

18. Krümmungsgleichen

Wir betrachten wieder eine *Ähnlichkeitsschar* von Hundekurven wie in Abschn. 6 (Abb. 5) und fragen nach dem *Ort aller Punkte mit vor-*

¹⁷ Eine ähnliche Konstruktion für die gewöhnlichen Hundekurven gab L. Burmester in seinem Lehrbuch der Kinematik (Leipzig 1886), S. 63.

¹⁸ Dieser Umstand machte den von der Einführung des Schielwinkels erwarteten Effekt für die Waffentechnik illusorisch.

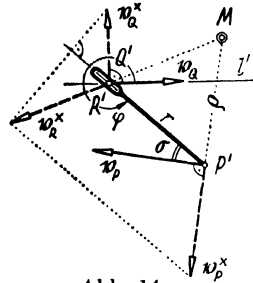


Abb. 14.

geschriebener *Bahnkrümmung* $\kappa = 1/\rho$. Wir bedienen uns hierzu wieder des räumlichen Fahrplandiagramms und schreiben zunächst die Krümmungsformel (17.1) auf kartesische Koordinaten um, wobei wir, um die Vorstellung zu fixieren, etwa den Fall des hyperbolischen Treffers (Abschn. 8) zugrundelegen.

Sei $P(x, y, z)$ mit $z = v_P \tau < 0$ der der betrachteten Bahnstelle P' des Verfolgers zugeordnete Diagrammpunkt; $Q(\varepsilon z \sin \sigma, \varepsilon z \cos \sigma, z)$ ist dann der zugehörige Diagrammpunkt des Ziels Q' . Die durch P' gehende Isochronenellipse hat, wie wir wissen, die numerische Exzentrizität $\varepsilon = v_Q/v_P$ und ist durch den Brennpunkt Q' (Satz 4) mit der zugehörigen Leitlinie $y = y_Q/\varepsilon^2 = (z/\varepsilon) \cdot \cos \sigma$ bestimmt. Aus der Abb. 4, in der lediglich der Index 0 zu unterdrücken ist, lesen wir dann (unter gehöriger Beachtung der Vorzeichen) die Beziehungen

$$r = \varepsilon y - z \cos \sigma, \quad r \sin \varphi = y \sin \sigma - x \cos \sigma \quad (18.1)$$

ab. Damit nimmt die Krümmungsformel (17.1) folgende Form an:

$$\rho = \frac{(\varepsilon y - z \cos \sigma)^2}{(\varepsilon x - z \sin \sigma) \cos \sigma} \quad (18.2)$$

Für $\rho = \text{const}$ stellt (18.2) die Gleichung eines *parabolischen Zylinders* Π dar, der durch die in der Ebene $z = 0$ liegende Basisparabel $\varepsilon y^2 = \rho x \cos \sigma$ und die Erzeugendenrichtung $x : y : z = \sin \sigma : \cos \sigma : \varepsilon$ festgelegt werden mag; er berührt die Fixebene $OUV(\zeta \equiv \varepsilon x - z \sin \sigma = 0)$ längs einer Erzeugenden, die der Polarebene von l bezüglich Γ angehört. Dieser Zylinder Π schneidet den Grundkegel Γ nach einer *Raumkurve* 4. Ordnung j , die in der Kegelspitze O einen Doppelpunkt (mit den Tangenten OU und OV) aufweist, also rational ist, und die Fernebene in zwei konjugiert-imaginären Punkten berührt, also geschlossen im Endlichen verläuft. Der Grundriß j' dieser Raumquartik ist die gesuchte „*Krümmungsgleiche*“ $\rho = \text{const}$. Es handelt sich um eine die Ferngerade berührende *rationale Quartik*, die im Knotenpunkt O' die beiden geraden Kollisionskurse berührt. Praktisch kommt jedoch nur jener Teil in Betracht, der von der unterhalb der Ebene $z = 0$ verlaufenden Schleife der Quartik j herrührt.

Bezeichnet ρ_{\min} den Radius des kleinsten Drehkreises, den ein Verfolger mit beschränktem Wendevermögen zu durchlaufen vermag, dann bilden die Krümmungsgleichen $\rho = \pm \rho_{\min}$ die innere Grenze jenes Gebietes, in welchem die Verfolgungsbahn keine Störung erleidet. — Die Grenze der ungestörten Verfolgung vom Zielsystem aus gesehen wird von der Parallelprojektion der zu $\rho = \pm \rho_{\min}$ gehörigen Raumquartiken

j gebildet. Es handelt sich um zwei *Pascalschnecken* j^s , deren Gleichung in Polarkoordinaten r, φ bereits in (17.1) vorliegt¹⁹. Aus dieser Polar-darstellung kann man über

$$x = r \sin(\sigma - \varphi) + \varepsilon z \sin \sigma, \quad y = r \cos(\sigma - \varphi) + \varepsilon z \cos \sigma, \quad (18.3)$$

wobei z aus der Isochronengleichung

$$r[1 - \varepsilon \cos(\sigma - \varphi)] = (\varepsilon^2 - 1) z \cos \sigma \quad (18.4)$$

entnommen wird, zur nachstehenden Darstellung der Krümmungsgleiche j' mittels φ als Parameter gelangen:

$$x = \frac{\varrho}{1 - \varepsilon^2} (\sin \sigma - \varepsilon \sin \varphi) [\sin(\sigma - \varphi) - \varepsilon \operatorname{tg} \sigma + \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi}{\cos \sigma}],$$

$$y = \frac{\varrho}{1 - \varepsilon^2} (\sin \sigma - \varepsilon \sin \varphi) [\cos(\sigma - \varphi) - \varepsilon]. \quad (18.5)$$

19. Bahnscheitel

Wird eine Bahnkurve von einer Krümmungsgleiche berührt, so liegt an der Berührungsstelle ein *Scheitel* vor. Die Kenntnis dieser Bahnscheitel ist bei beschränktem Wendevermögen ebenfalls wichtig für die Beurteilung eines störungsfreien Laufs.

Zwecks Ermittlung der Bahnscheitel führen wir in die Krümmungsformel (18.2) gemäß (8.11) die Hilfskoordinaten ξ, η, ζ ein, um anschließend die einfache Parameterdarstellung (8.20) anwenden zu können. Man erhält:

$$\varrho = \frac{[(1 - n) \varepsilon \xi + (1 + n) \varepsilon \eta - 2 \zeta \sin \sigma]^2}{4 n^4 \zeta \cos^3 \sigma} =$$

$$= \frac{[(1 - n) \varepsilon \xi_0 \vartheta^{-n} + (1 + n) \varepsilon \eta_0 \vartheta^n - 2 \zeta_0 \sin \sigma]^2 \vartheta}{4 n^4 \zeta_0 \cos^3 \sigma} \quad (19.1)$$

$d\varrho/d\vartheta = 0$ führt dann auf die folgende Bestimmungsgleichung für die zu stationären Werten von ϱ gehörigen ϑ -Werte:

$$(1 - n) (1 - 2n) \varepsilon \xi_0 \vartheta^{-n} + (1 + n) (1 + 2n) \varepsilon \eta_0 \vartheta^n - 2 \zeta_0 \sin \sigma = 0. \quad (19.2)$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$(1 - n) (1 - 2n) \varepsilon \xi + (1 + n) (1 + 2n) \varepsilon \eta - 2 \zeta \sin \sigma = 0 \quad (19.3)$$

¹⁹ „Drehkreiskurven“ bei R. Hosemann a. a. O. — Für die gewöhnlichen Hundekurven ($\sigma = 0$) reduziert sich die Drehkreiskurve j^s auf einen doppelt zählenden Kreis; die Krümmungsgleiche j' weist eine Selbstberührung auf.

oder — nach Rückkehr zu den alten Koordinaten —

$$2 x \sin \sigma + 3 y \cos \sigma = (2 \varepsilon + \varepsilon^{-1} \cos^2 \sigma) z. \quad (19.4)$$

Diese Gleichung stellt eine durch den Ursprung O gehende Ebene γ dar, die alle zu Bahnscheiteln gehörigen Schicksalspunkte enthält. Die Scheitel einer Hundekurve liegen mithin auf den Grundrissen jener beiden (leicht angebbaren) Erzeugenden e_1 und e_2 , die γ aus dem Trägerkegel Γ ausschneidet. Anzahl und Realität der Scheitel hängen ganz vom Typ der Hundekurve ab.

Nähere Untersuchung, die sich vorteilhaft auf den durch

$$x : y : z = 3 \sin \sigma : 3 \cos \sigma : (2 \varepsilon + \varepsilon^{-1}) \quad (19.5)$$

dargestellten Polstrahl g von γ bezüglich Γ stützt, zeigt, daß ein hyperbolischer Treffer für $n \geq \frac{1}{2}$ genau einen reellen Bahnscheitel besitzt, welcher für $n = \frac{1}{2}$ in den Treffpunkt rückt, während für $n < \frac{1}{2}$ zwei reelle Scheitel auftreten oder gar keine, je nachdem ob $\cos \sigma \leq 2 \varepsilon$. Der Übergangsfall $\cos \sigma = 2 \varepsilon$ ist durch zusammengedrückte Scheitel ausgezeichnet (γ durch $g = e_1 = e_2$); wegen $g' = l'$ ist es dann gerade der Kreuzungspunkt der Hundekurve mit dem Zielkurs, wo ein fünfpunktig berührender Krümmungskreis existiert.

Die für den hyperbolischen Treffer abgeleiteten Formeln (19.4) und (19.5) enthalten den Exponenten n nicht mehr, gelten daher auch für den elliptischen und parabolischen Treffer sowie für den Flüchter.

20. Nachtrag und Schlußwort

Als Ergänzung zu der hier auseinandergesetzten, vorwiegend geometrischen Behandlungsweise des vorliegenden Verfolgungsproblems möge nachträglich noch eine *rein analytische Durchführung* skizziert werden. Die Betrachtungen sollen dabei auf den *hyperbolischen Treffer* beschränkt bleiben.

Wir legen die Verfolgerposition P' gegenüber dem Ziel Q' durch den Abstand $r = Q'P'$ und den vom Zielkurs aus gemessenen Peilwinkel $\varphi = \angle O'Q'P'$ fest (Abb. 15) und denken uns der Bequemlichkeit

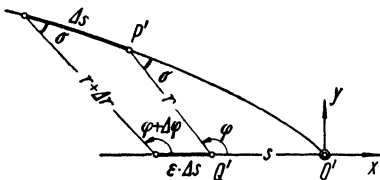


Abb. 15.

halber den Bewegungsablauf umgekehrt, wobei das Treffereignis die Ausgangssituation abgebe. Rückt der Verfolger in der Zeitspanne $\Delta \tau$

um das Wegstück Δs weiter, so legt das Ziel die Strecke $\varepsilon \cdot \Delta s$ zurück und die Relativkoordinaten r, φ des Verfolgers erfahren die Zuwächse Δr und $\Delta \varphi$. Projizieren wir das von P', Q' und den Nachbarlagen gebildete Viereck einmal normal auf den Peilstrahl $P'Q'$ und einmal parallel dazu, gleichzeitig mit $\Delta \tau \rightarrow 0$ zu Differentialen übergehend, so erhalten wir die beiden *Schlüsselgleichungen*²

$$dr = (\cos \sigma + \varepsilon \cos \varphi) ds, \quad r \cdot d\varphi = (\sin \sigma - \varepsilon \sin \varphi) ds. \quad (20.1)$$

Division führt auf die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{r} = \frac{\cos \sigma + \varepsilon \cos \varphi}{\sin \sigma - \varepsilon \sin \varphi} d\varphi, \quad (20.2)$$

die sich unmittelbar integrieren läßt. Man erhält mittels der den rechten Integranden rationalisierenden Substitution

$$wu = \sin \sigma \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \varepsilon \text{ mit } w^2 = \varepsilon^2 - \sin^2 \sigma > 0 \quad (20.3)$$

nach einiger Rechnung

$$r = c \cdot \left(\frac{u-1}{u+1} \right)^{\nu} \cdot \frac{w^2 u^2 + 2\varepsilon wu + (2\varepsilon^2 - w^2)}{u^2 - 1} \text{ mit } \nu = \frac{\cos \sigma}{w} > 1. \quad (20.4)$$

Kehrt man unter Berücksichtigung der zur Ausgangssituation $r_0 = 0$ gehörigen Anfangswerte

$$\sin \varphi_0 = \frac{\sin \sigma}{\varepsilon}, \quad \cos \varphi_0 = -\frac{w}{\varepsilon}, \quad u_0 = 1 \quad (20.5)$$

zum Argument φ zurück, so erhält man die Darstellung

$$r = C \cdot \left(\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right)^{\nu-1} \left(-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right)^{-\nu-1}, \quad (20.6)$$

in welcher man die *Polargleichung der Relativbahn des Verfolgers* vor sich hat²⁰. Aus der Kenntnis einer Anfangsstellung r_1, φ_1 ließe sich der Wert der Integrationskonstanten C bestimmen.

Nummehr liefert die zweite Gleichung (20.1) den *Verfolgerweg*

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{r d\varphi}{\sin \sigma - \varepsilon \sin \varphi} = \frac{2c}{w \sin^2 \sigma} \int_1^u \left(\frac{u-1}{u+1} \right)^{\nu} R(u) du, \quad (20.7)$$

wobei

²⁰ R. Hosemann führt a. a. O. die Integration der Gleichung (20.2) mittels der komplexen Substitution $z = \exp(i\varphi)$ durch.

$$R(u) = \frac{w^2 u^2 + 2 \varepsilon w u + (2 \varepsilon^2 - w^2)}{(u^2 - 1)^2}. \quad (20.8)$$

Diese rationale Funktion gestattet die Partialbruchzerlegung

$$R(u) = \frac{A_1}{(u-1)^2} + \frac{A_2}{u^2-1} + \frac{A_3}{(u+1)^2} \quad (20.9)$$

$$\text{mit } A_1 = \frac{\varepsilon}{2} (\varepsilon + w), \quad A_2 = w^2 - \varepsilon^2, \quad A_3 = \frac{\varepsilon}{2} (\varepsilon - w).$$

Damit läßt sich das auftretende Integral elementar auswerten:

$$\int_1^u \left(\frac{u-1}{u+1} \right)^\nu R(u) du = \frac{A_1}{2(\nu-1)} \left(\frac{u-1}{u+1} \right)^{\nu-1} + \frac{A_2}{2\nu} \left(\frac{u-1}{u+1} \right)^\nu + \frac{A_3}{2(\nu+1)} \left(\frac{u-1}{u+1} \right)^{\nu+1} \quad (20.10)$$

und man erhält bei Rückkehr zum Argument φ nach einigen Umformungen

$$s = C \cdot \left(\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right)^{\nu-1} \left(-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right)^{-\nu-1} \cdot \frac{1 - \varepsilon \cos(\varphi - \sigma)}{(1 - \varepsilon^2) \cos \sigma}. \quad (20.11)$$

Die Richtigkeit der Ausdrücke (20.6) und (20.11) für r und s kann nachträglich durch Einsetzen in die Schlüsselgleichungen (20.1) unschwer bestätigt werden. Vergleich miteinander liefert die Beziehung

$$\frac{r}{s} = \frac{(1 - \varepsilon^2) \cos \sigma}{1 - \varepsilon \cos(\varphi - \sigma)}, \quad (20.12)$$

welche für $s = \text{const}$ die *Polargleichung eines Isochronenkegelschnitts* darstellt (Abschn. 6). Auch die *Treffzeitformel* (8.4) läßt sich unmittelbar daraus gewinnen, wenn man $s = v_P T$ setzt. — Mit Kenntnis der Ausdrücke für r und s kann natürlich auch sofort eine *Parameterdarstellung der Hundekurve*, etwa durch

$$x = r \cos \varphi - \varepsilon s, \quad y = r \sin \varphi, \quad (20.13)$$

hingeschrieben werden.

Natürlich sind auch bei der analytischen Behandlungsweise die den verschiedenen Erscheinungsformen der Hundekurve gemäß Abschn. 7 entsprechenden Fallunterscheidungen zu berücksichtigen.

Man lasse sich durch die verhältnismäßige Kürze der soeben auseinandergesetzten rein rechnerischen Behandlung nicht täuschen, da

viele untergeordnete, jedoch ziemlich langwierige Zwischenrechnungen unterdrückt wurden. Gewiß ging auch die geometrische Behandlung mit den Raumdiagrammen nicht ohne bedeutenden Aufwand ab und verlangte einige Kenntnisse aus der höheren Geometrie, doch gewährt sie zweifellos einen wesentlich tieferen Einblick und stellt interessante Zusammenhänge mit anderen Gegenständen her, welche nicht von vornherein zu erwarten waren. Daß beispielsweise die auftretenden Verfolgerbahnen als Parallelprojektionen räumlicher W-Kurven aufgefaßt werden können, ist bisher nicht einmal bei den gewöhnlichen Hundekurven ($\sigma = 0$) bemerkt worden, obwohl dies aus ihren verhältnismäßig einfachen und seit langem bekannten Gleichungen (16.1) und (16.2) unschwer herauszulesen gewesen wäre. Die vorliegende Abhandlung kann daher auch — über *R. Hosemann* hinaus, der sein Hauptaugenmerk auf die Relativbahnen richtet — erstmals eine Diskussion und Bilder der *absoluten Verfolgerbahnen* bringen.