L.G.Vidiani 64 rue de l'EUROPE 21121 FONTAINE LÈS DIJON TEL : 03 80 56 65 54

Adresse email Internet : *lg_vidiani@ipac.fr*

Roulement Universel

(Zip 2 TEX rouleq.tex) version 03 06 04 11h50

ROULEMENT SANS GLISSEMENT UNIVERSEL

Le but de cet article est de montrer comment on peut utiliser les proc dures ANIMATE et DISPLAY pour simuler un ROULEMENT SANS GLISSEMENT, et cela pour la plus grande vari t d'exemples.

Th orie du ROULEMENT SANS GLISSEMENT

La courbe C_1 appel e ROULANTE, roule sans glisser sur la courbe C appel e BASE. *(toutes les notations sont classiques, et la figure ci-contre sert d'illustration).* Soit t le param tre sur C et t_1 celui sur C_1. La condition de roulement sans glissement de C_1 sur C est $ds_1 = \delta ds$, si les vecteurs tangents unitaires au point M de roulement-contact sont tels que $\tau_1 = \delta\tau$, avec $\delta = \pm 1$, selon qu'ils sont gaux oppos s. *(Les sens au contact sont impos s par le choix des param tres t et t_1 croissants).* Cherchons le lieu du point P connu par ses coordonn es polaires r et φ dans le rep re $O_1X_1Y_1$. Alors la relation de CHASLES donne : $OP = OM + MO_1 + O_1P$ et de m me pour les angles : $(OX, u_1) = (OX, \tau) + (\tau, \tau_1) + (\tau_1, u_1) = \alpha + \frac{1-\delta}{2}\pi - V_1$; de m me $(OX, O_1P) = (OX, u_1) + (u_1, O_1X_1) + (O_1X_1, O_1P) = \alpha + \frac{1-\delta}{2}\pi - V_1 - \theta_1 + \varphi = \alpha + \frac{1-\delta}{2}\pi - \alpha_1 + \varphi$, et ainsi les coordonn es absolues de P sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{X_P} &= \mathbf{X} - \boldsymbol{\rho_1}\delta\cos(\alpha - \mathbf{V_1}) + \mathbf{r}\delta\cos(\alpha - \boldsymbol{\alpha_1} + \varphi) \\ \mathbf{Y_P} &= \mathbf{Y} - \boldsymbol{\rho_1}\delta\sin(\alpha - \mathbf{V_1}) + \mathbf{r}\delta\sin(\alpha - \boldsymbol{\alpha_1} + \varphi) \end{aligned} \quad \textbf{(F)}$$

Cette formule se r duit lorsque $P = O_1$, car alors $r = 0$; et aussi lorsque P est le centre de courbure en M C_1, puisqu'alors MP est normale en M C et C_1, et il est plus int r ssant dans la relation de CHASLES, d' crire directement MP au lieu de $MO_1 + O_1P$ puisque $MP = R_1\nu_1$ (ν_1 se d duit de τ_1 par la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$) et comme $\nu_1 = \delta\nu$, et ν ayant comme angle polaire $\alpha + \frac{\pi}{2}$, la variante "lieu du centre de courbure" en M de la formule pr c dente s'obtient en rempla ant ρ_1 par $-R_1$ et $\alpha - V_1$ par $\alpha + \frac{\pi}{2}$ et r par 0, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{X_P} &= \mathbf{X} - \mathbf{R_1}\delta\sin(\alpha) \\ \mathbf{Y_P} &= \mathbf{Y} + \mathbf{R_1}\delta\cos(\alpha) \end{aligned} \quad \textbf{(FC)}$$

Maintenant lorsqu'on veut simuler le roulement par ANIMATE, il faut tre capable de repr senter toutes les positions "interm diaires" de la roulante : Pour cela d'abord par la formule **(F)** on cherche le lieu de O_1, puis par CHASLES on calcule $(OX, O_1X_1) = (OX, \tau) + (\tau, \tau_1) + (\tau_1, O_1X_1) = \alpha + \frac{(1-\delta)\pi}{2} - \alpha_1$ et alors pour chaque valeur de t la "ROULANTE INTERMÉDIAIRE" est repr sent e par :

$\boxed{\mathbf{OP(u,t) = OO_1 + X_1(u)I_1 + Y_1(u)J_1} \ |}$ o $(X_1(u), Y_1(u))$ est la repr sentation param trique de la roulante C_1 dans le rep re $(O_1X_1Y_1)$ qui lui est attach . Voici quelques exemples : *(Les spirales log sont repr sent es par $\rho = ae^{m\theta}$, les cyclo des par x=a(t-sint), y=a(1-cost), les cardio des par $\rho = a(1 - cos\theta)$; astro de par $x = acos^3t, y = asin^3t$; cha nette $y = ach\frac{x}{a}$; pour r duire la largeur des colonnes, le choix du point P est condens en P ; CENTRE DE COURBURE EN M est repr sent par CdC ; Sommet par St ; point asymptote par PA ; Point de rebroussement par Rt ; Condition de roulement par C de roulement ; Lieu ABSOLU de P par Lieu de P ; quand il n'est pas d taill c'est que ce n'est pas une courbe remarquable ;)*

BASE	**ROULANTE**	**P**	**C. de roulement**	δ	α	$\boldsymbol{\alpha_1}$	$\mathbf{V_1}$	**Lieu de P**
Cercle (O,R)	Spirale Log	CdC	$R\theta = \delta a(1+m^2)^{1/2}\frac{1}{m}$	-1	$\theta + \frac{\pi}{2}$	$\theta_1 + V_1$	$cotan(V_1) = m$	$\rho_P = mR\theta + Cte$
droite Ox	cyclo de	CdC	$x = 4a(1 - cos(\frac{t_1}{2})$	-1	0	$\frac{\pi}{2} - \frac{t_1}{2}$		demi cercle
droite Ox	astro de	CdC	$4x = \frac{3a}{4}(cos(2t_1) + 1)$	-1	0	$\pi - t_1$		demi-ellipse
droite Ox	Cha nette	CdC	$x = asht_1$	+1	0			parabole
droite Ox	Spirale Log	CdC	$x = \delta\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}e^{m\theta_1}$	+1	0	$\theta_1 + V_1$		demi-droite

BASE	ROULANTE	P	C. de roulement	δ	α	α_1	V_1	Lieu de P
droite Ox	Cha nette	Sommet	$x = asht_1$	+1	0	$d\alpha_1 = \frac{dt_1}{cht_1}$		
droite Ox	Spirale Log	PA	$x = \delta\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}e^{m\theta_1}$	+1	0	$\theta_1 + V_1$		demi-droite
droite Ox	Dev de cercle	centre	$x = \delta a_1\frac{t_1^2}{2}$	+1	0	t_1	$t_1 - \theta_1$	parabole
droite Ox	Parabole	Foyer	p nible	+1	0		$\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1}{2}$	cha nette
droite Ox	Ellipse	Sommet			0			roulette Delaunay
droite Ox	Astro de	Rt	$4x = 3a(cos(2t_1) + 1)$	-1	0	$\pi - t_1$	$\pi - t_1 - \theta_1$	
droite Ox	Cyclo de	Rt	$t = 4a(1 + cos\frac{t_1}{2})$	0	$\frac{\pi}{2} - \frac{t_1}{2}$			
droite Ox	Cardio de	Rt	$x = t = 4a(1 - cos\frac{\theta_1}{2})$	+1	0	$\frac{3}{2}\theta_1$	$\frac{\theta_1}{2}$	
cyclo de	Cardio de	Rt	$\theta_1 = 2\pi - t$	-1	$\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$	$\frac{3}{2}\theta_1$	$\frac{\theta_1}{2}$	segment
cardio de	Cardio de	Rt	$\theta_1 = 2\pi - \theta$	-1	$\frac{3}{2}\theta$	$\frac{3}{2}\theta_1$	$\frac{\theta_1}{2}$	

ROULEMENT UNIVERSEL AVEC MAPLE

Le programme Maple ci-dessous (fait par Alain Esculier), donne une simulation la plus universelle possible. Son utilisation des affixes des points, permet une programmation plus synth tique. *(Pour viter les recopies, il peut tre envoy par Mail, aux lecteurs qui en feront la demande par Mail)*

À cause du fait que l'algorithme de Robert H. Risch, qui teste la calculabilit en termes finis des int grales ind finies (v rification du th or me de Liouville 1875) est insuffisament implant dans Maple 5, il reste des probl mes qui ont t en partie r solus dans les versions post rieures car avec Maple 8 les calculs aboutissent en un temps raisonnable pour tous les exemples donn s.

```
restart:with(plots):
# ———————— calcul de t tel que f(t)=a eps pr s
calc:=proc(f,a,eps,t0,pas0)
local pas, tamp, tt, sg,k;
pas:=pas0: tt:=t0 : tamp:=evalf(f(tt));
#print(tamp-a);
sg:=sign(tamp-a):
for k to 1000 while evalf(abs(tamp-a))¿eps do
tt:=tt+pas : tamp:=evalf(f(tt)):
if sg<>sign(evalf(tamp-a)) then tt:=tt-pas: pas:=pas/10:fi: od;
if k > 1000 then print("valeur non trouv e :",k); fi;
tt;
end:
#==============================================
# b l'affixe, fonction en t, de la base
# r affixe, fonction de u, de la roulante
# extbase et extroul : extr mit des intervalles d' tude : 0..extbase, 0..extroul
# L longueur de l'arc de roulement
# n nombre de frames de l'animation
#——————————————————-
essai:=proc(b,r,extbase,extroul,L,n)
local db,dr,sr,dsb,dsr,sb,Tb,Tr,fb,fr,tab,gbase,groul,i;
db:=diff(b(t),t): dr:=diff(r(u),u):
dsb:=evalc(abs(db)): dsr:=evalc(abs(dr)):
sb:=expand(simplify(int(subs(t=w,dsb),w=0.001..t)));
sr:=expand(simplify(int(subs(u=w,dsr),w=0.001..u)));
Tb:=expand(db/dsb): Tr:=expand(dr/dsr):
fb:=simplify(unapply(sb,t)); fr:=unapply(sr,u): tab:=NULL:
# tab:= [ val,t tel fb(t)=val, u tel fr(u)=val
for i from 0 to n do
tab:=tab,[i*L/n,calc(fb,i*L/n,0.01,0.0001,0.1),calc(fr,i*L/n,0.01,0.0001,0.1)] od:
tab:=[tab];
```

```
gbase:=complexplot(b(t),t=0..extbase,color=blue):
groul:=display([seq(
complexplot(subs(t=tab[i,2],Tb)/subs(u=tab[i,3],Tr)*(r(u)-r(tab[i,3]))+
b(tab[i,2]),u=0..extroul),i=1..n)],insequence=true,scaling=constrained):
display([gbase,groul],scaling=constrained);#,view=[-10..10,-10..10]
end:
```

Exemples trait s

Cardio de roulant sans glisser sur une cyclo de

b1:=$t- > t + cos(t + Pi/2) + I * sin(t + Pi/2)$;# base
r1:=$u- > cos(u) * (1 - cos(u)) + I * sin(u) * (1 - cos(u))$; # roulante
essai(b1,r1,evalf(2*Pi),evalf(2*Pi),8.42,20);

Ellipse roulant sans glisser sur une cyclo de

b2:=$t- > t + cos(t + Pi/2) + I * sin(t + Pi/2)$;# base
r2:=$u- > 2 * sin(u) + I * cos(u)$; # roulante
essai(b2,r2,evalf(2*Pi),evalf(2*Pi),4.6,20);

Ellipse roulant sans glisser sur un cercle

b3:=$t- > cos(t) + I * sin(t)$;# base
r3:=$u- > -2 * cos(u) + I * sin(u)$; # roulante
essai(b3,r3,evalf(2*Pi),evalf(2*Pi),2.,10);

Ellipse roulant sans glisser sur une parabole

b4:=$t- > t + I * t^2$; # base
r4:=$u- > -2 * cos(u) + I * sin(u)$; # roulante
essai(b4,r4,2.5,evalf(2*Pi),5.,10);

Parabole roulant sans glisser sur une parabole

b5:=$t- > t + I * t^2$; # base
r5:=$u- > u - I * u^2$; # roulante
essai(b5,r5,3,3,10,10);

D veloppante de cercle roulant sans glisser sur une droite

b6:=$t- > t + I * t$;# base
r6:=$u- > cos(u) - u * sin(u) + I * (sin(u) + u * cos(u))$; # roulante
essai(b6,r6,20,2*Pi,20,20,0);

Conclusion Nous laissons au lecteur le soin d'une part de voir si le programme peut tre encore condens , de rajouter la possibilit de tracer le lieu d'un point li au plan mobile de la roulante d'autre part d'imaginer et de tester d'autres exemples, de visualiser simultan ment plusieurs roulements sur la m me base, avec retours. D'autre part en consultant les ouvrages sp cialis s [1,2,6] le lecteur pourra trouver un lien entre les “roulettes de Delaunay” lieu des foyers des coniques roulantes sur une droite, les cha nettes et les m ridiennes de surfaces de r volution de volume minimal et m me un probl me hydrostatique et en analogie surprenante avec les roues carr es, la base n c ssaire pour qu'un point d'une roulante circulaire d crive une droite. Enfin [3,4,5] il pourra tre surpris par les mobiles   roues-carr es et   plancher de niveau constant ! Comme ce cas peut difficilement s'int grer comme cas particulier du programme pr c dent, le lecteur peut aller voir en http://perso.wanadoo.fr/jacques.mandonnet/index.html, cliquer sur le menu “figures anim es” : l'animation de l'auto   roues carr es est la troisi me figure et le programme Maple appara t (et on peut l'imprimer) en cliquant sur l'image ! Alain Esculier, toujours avec sa dext rit et sa ma trise de Maple et son imagination sans faille, a aussi mis sur son site (http://aesculier.chez.tiscali.fr/ rubrique Maple, puis “camions shadocks”) de tels engrenages “shadocks”, pour affranchir compl tement les lecteurs ventuels de quadrature qui seraient encore aussi conformistes (s'ils lisent quadrature, ils ne le sont plus) que les habitants de Vondervotteimittis, dans la nouvelle “Le Diable dans le Beffroi” d'Edgar Po .

Il ne faut pas non plus oublier le lien entre le roulement sans glissement et toute la th orie des engrenages ch re   Huyghens qu'il traitait au moyen des fractions continues.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Brocard, T. Lemoyne, courbes g om triques remarquables, Blanchard 1967) tome I p 193-196, tome II p 29-30.
[2] Revue du palais de la d couverte (num ro sp cial 45 d cembre 1995) p 104.
[3] Revue Quadrature Septembre-Octobre 1992 p 35 (roue carr e)
[4] I. Stewart, Visions g om triques (Pour la Science, Belin 1994) p 143-148 (roue carr e).

[5] I. Stewart, Pour la science juin 1993 p 102-105 (roue carr e).
[6] F. G. Teixeira, trait des courbes sp ciales remarquables planes et gauches, (Gabay 1995) Tome II p 223-229, tome III p 99 p 124-129.