KUNST ODER ALGEBRAISCHE GEOMETRIE?

BETRACHTUNGEN ÜBER EINE MATHEMATISCHE SKULPTUR IN DÜSSELDORF

RAINER KAENDERS

Was ist Kunst? Wer zu den Unverbesserlichen gehört, die diese Frage schon mal stellen, der weiß, dass sie bei den meisten Kunstinteressierten höchstens ein gequältes Lächeln erzeugt und bei Experten überhaupt nicht mehr gestellt wird. Würde sie doch angesichts eines konkreten Werkes zur Frage *Ist das Kunst?* mutieren, deren Beantwortung mitunter recht unbequem werden kann. Und doch bedarf es einer Antwort auf diese Frage — allein schon, um dem Wort *Kunst* eine Bedeutung zu geben.

Ähnlich verhält es sich mit der Frage: *Was ist Mathematik?* Schon 1883 schrieb Georg Cantor (1845 – 1918), der Erfinder der Mengenlehre, in Hinblick auf allgemeine mathematische Begriffsbildungen „*...das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit.*" In der Tat steckt die Mathematik spätestens seit Ende des 19ten Jahrhunderts wie die Kunst in einem Dilemma bezüglich ihrer Grenzen.

Beide, die Kunst und die Mathematik sind kreative Interpretationen dieser Welt. Auf das Fehlen allgemeingültiger Kriterien zur Definition dieser beiden Säulen unserer Kultur reagieren Mathematiker wie auch Künstler, indem sie sich auf ihren *Geschmack* zurückziehen. Nur über den lässt sich bekanntlich noch viel mehr streiten.

In Düsseldorf, an der Heinrich-Heine-Universität, gibt es nun seit dem Sommer 1999 die Gelegenheit, anlässlich eines konkreten Werkes sich beide Fragen gleichzeitig zu stellen. Dort steht nämlich eine etwa zweieinhalb Meter große Skulptur einer mathematischen Fläche, der sogenannten *Diagonalfläche*. Dies ist – wie Mathematiker sagen – eine algebraische Fläche, zu deren Besonderheiten die Tatsache gehört, dass auf ihr 27 Geraden liegen. Diese sind auf der Oberfläche der Plastik sichtbar. Die Gleichungen der Geraden erinnern stark an die Gleichungen der Diagonalen eines Tetraeders (das ist eine Pyramide auf dreieckigem Grundriss). Daher hat die Fläche ihren Namen. Die Düsseldorfer Skulptur ist mehr oder weniger eine riesenhafte Version eines kleinen Gipsmodells aus dem letzten Jahrhundert.

Ausgeführt wurde die Skulptur von der Klever Bildhauerin Claudia Carola Weber und dem Bildhauer Ulrich Forster aus Troisdorf. Idee und Initiative kamen von Gerd Fischer, Professor für reine Mathematik in Düsseldorf. In meiner Zeit als Assistent in Düsseldorf habe die Berechnungen zum Bau der Skulptur durchgeführt und das Projekt mathematisch begleitet.

Die Skulptur der Diagonalfläche besitzt drei emporragende *Flügel*, die alle drei gleich aussehen. Die ganze Skulptur ist symmetrisch in dem Sinne, dass sie bei einer Drehung um ein Drittel einer vollen Umdrehung in sich überführt wird. Die Öffnungen zwischen diesen Flügeln erlauben den Blick auf die Fläche; insbesondere auf drei Löcher oder *Durchgänge*. Wenn man vor einer der drei Öffnungen steht, sieht man direkt auf zwei Punkte, in denen sich jeweils drei der 27 Geraden schneiden –

Date: 4. Oktober 2002.

sogenannte *Eckardtpunkte*. Insgesamt gibt es zehn solcher Eckardtpunkte. Drei weitere liegen im Unendlichen: man erkennt leicht drei Gruppen dreier in einer Ebene gelegener paralleler Geraden. Schließlich befindet sich noch ein Eckardtpunkt oben auf dem Schnittpunkt der Fläche mit der zentralen vertikalen Achse. Dort hat die Fläche einen sogenannten *Affensattel*. Der Grund für diesen Namen: wenn sich ein Affe daraufsetzt, hat er nicht nur Platz für seine Beine, sondern auch für seinen Schwanz. Mit ihren zweieinhalb Metern übersteigt die Plastik die Dimensionen eines Menschen. Die Durchgänge und der Affensattel, in deren Umgebung es für den Betrachter sehr viel zu entdecken gibt, befinden sich in greifbarer Nähe.

Weltausstellung, 1893 in Chicago

Schon 1872 enstand das erste kleine Modell dieser Fläche – gebaut von Adolf Weiler, einem Studenten des Göttinger Mathematikers Alfred Clebsch (1833 – 1872). Clebsch hatte der mathematischen Fläche ein Jahr zuvor ihren Namen gegeben und die Mathematiker des letzten Jahrhunderts auf die Existenz einer solchen wunderlichen Fläche aufmerksam gemacht. Daher wird sie auch *Clebsche Diagonalfläche* genannt. Eine Gipskopie des Weilerschen Modells wurde Teil einer weltbekannten Serie von 27 Gipsmodellen algebraischer Flächen: der sogenannten *Rodenberg–Serie*.

Allgemein erfreuten sich mathematische Modelle gegen Ende des letzten Jahrhunderts großer Beliebtheit. Eine treibende Kraft bei dieser Entwicklung war der berühmte und einflussreiche Mathematiker Felix Klein (1849 – 1925). Als Kommissar des preußischen Unterrichtsministeriums begleitete er eine von seinem Assistenten Walther von Dyck vorbereitete Ausstellung „deutscher mathematischer Modelle“ 1893 zur Ausstellung der *Deutschen Mathematiker Vereinigung* nach München und schließlich im selben Jahr zur Weltausstellung nach Chicago. Mit im Gepäck hatte er auch das Modell der Diagonalfläche, an dessen Entwicklung er als Kollege von Clebsch in Göttingen auch beteiligt war.

Dieses klassische Modell stand Pate für unsere Keramikskulptur. Doch aus der Zeit seiner Entstehung hatten wir zunächst nur die Gipsmodelle und allgemeine theoretische Abhandlungen über die Diagonalfläche zur Verfügung – nicht aber die für den Bau der Modelle verwendeten konkreten mathematischen Formeln. Das änderte sich, als wir schliesslich in einem Sitzungsbericht vom 3. August 1872 der *Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* fündig wurden, in dem Clebsch und Klein über ihre Modelle algebraischer Flächen berichteten und in dem sich auch eine kurze mathematische Anleitung für den Bau der damaligen Modelle fand. Die neue Skulptur ist dem alten Modell weitgehend ähnlich – nur haben wir uns dafür entschieden, die Fläche nicht gleich unterhalb der Durchgänge abzuschneiden, sondern sie bis zum Rand des sie begrenzenden Zylinders ausschwingen zu lassen.

Brand bei 1230 Grad Celsius

Beim Bau der Skulptur ging es darum, ein gestalterisch ansprechendes Objekt zu schaffen. Daher haben sich die Bildhauer für das keramische Material mit seiner rauhen Oberfläche entschieden.

Nichtsdestoweniger war es unser Ziel, die mathematischen Vorgaben einzuhalten. Dabei stand uns, im Gegensatz zu den Mathematikern des letzten Jahrhunderts, Computertechnik zur Verfügung. Mit dem Computer haben wir 100 horizontale Querschnitte durch ein Drittel der Diagonalfläche berechnet, die es gestatteten, den Verlauf der 27 Geraden zu verfolgen. Zunächst bauten dann die BildhauerInnen ein Drittel der Figur massiv aus Tonplatten auf. Von diesem Positiv nahmen sie dann eine zweiteilige Gipsform. Dabei wurde der Massivkern zerstört. Mit dieser zweiteiligen Gipsformen schließlich modellierten sie dreimal ein zweiteiliges Drittel der Skulptur — jedes bis auf eine Innenkonstruktion hohl. Die sechs so enstandenen, noch feuchten Teile der Diagonalfläche wurden dann in der Werkstatt zusammenmontiert. So konnte der Trocknungs– und Schrumpfungsprozess (10% in der Länge) möglichst schadlos in einem regelmäßig zu überwachenden Trockenschrank vonstatten gehen. Dieser Trocknungsprozess dauerte ungefähr drei Monate. Mit größter Vorsicht wurden nun die sechs Teile der Skulptur wieder auseinandergenommen und in der Eifel bei einer Firma für Ofenkacheln bei bis zu 1230 Grad Celsius in einem Haubenofen eine Woche lang gebrannt. Nachdem die enorme Haube des Ofens über der Keramik wieder hochgezogen wurde, und die sechs Teile unversehrt geblieben waren, wurde die Skulptur mit Hilfe von Portalkran und Flaschenzug auf den schon vorbereiteten Sockel montiert.

‘La Science tue la Poésie’

Ist das Modell Mathematik? Für Klein, der sich Flächen wie die Diagonalfläche zum Forschungsgegenstand erwählt hatte, war dieses Modell von zentraler Wichtigkeit für seine Forschungen. Er schreibt, dass er daran alle wesentlichen Verhältnisse solcher Flächen kennengelernt habe, welche er dann in seiner Arbeit als abstrakte mathematische Wahrheiten analysierte und darstellte. Und auch die Skulptur in Düsseldorf erweckt die Neugierde so mancher Studierender auf die Geheimnisse der *algebraischen Geometrie*.

So, wie viele Kunstliebhaber einen Flaschentrockner nicht zur Kunst zählen, so würde wohl der überwiegende Teil der Mathematiker bestreiten, dass ein derart konkreter Gegenstand Mathematik sein kann.

Ist es Kunst? Als Skulptur erinnert dieses Gebilde an Werke des Konstruktivismus, wie etwa von den Brüdern Antoine Pevsner (1886 – 1962) und Naum Gabo (1890 – 1970). Pevsner erstellte beispielsweise verschiedene Serien von Flächen, welche die Bewegung einer Kurve im Raum darstellen, bei der sich jeder einzelne Punkt der Kurve entlang einer geraden Bahn bewegt. Diese Flächen bestehen also aus der Vereinigung von unendlich vielen Geraden. Mathematisch würde man so konstruierte Flächen als *Regelflächen* bezeichnen. Er versuchte auf diese Weise gleichzeitig in Raum und in Zeit zu modellieren. Und doch grenzte er sich scharf gegen jede Vermutung ab, mathematische Gesetzmäßigkeiten seien die Konzepte für sein Werk („La Science tue la Poésie [Die Wissenschaft tötet die Poesie]“).

Auch im Werk von Naum Gabo finden sich einige Flächen mit mathematischen Gesetzmäßigkeiten (vor allem Regelflächen). Es ist nicht ausgeschlossen, dass er 1911 als Student der Naturwissenschaften in München die dortige Sammlung mathematischer Modelle (einschließlich eines Modells der Diagonalfläche) kennengelernt hat. Doch auch Gabo verwehrt sich gegen jede Vereinnahmung: „*Ich behaupte nicht, mein Werk sei das eines Wissenschaftlers. Ich bin kein Wissenschaftler und ich verstehe von der Wissenschaft nicht mehr als jeder andere, der durch die Routine der üblichen Universitätsausbildung gegangen ist. Ich habe gelernt, wissenschaftliche Bücher zu lesen und ich nehme an, dass ich ihre Bedeutung verstehe, ich wäre jedoch sicher nicht in der Lage, wissenschaftliche Arbeit zu leisten. Meine Werke enthalten von der Mathematik nicht mehr, wie eine Figur von Michelangelo* *von der Anatomie, und ich verachte jene Künstler, die ihren Werken einen wissenschaftlichen Anstrich geben, indem sie sie nach algebraischen Formeln benennen. Das ist eine glatte Entwürdigung sowohl der Kunst als auch der Wissenschaft.*"

Auch die BildhauerInnen der Düsseldorfer Skulptur haben – nicht zuletzt, weil sie diesen Teil der Kunstgeschichte gut kennen – von Anfang an nicht den geringsten Zweifel daran gelassen, dass sie die mathematische Skulptur nicht für ein Kunstwerk halten. Aber anspruchsvoll und interessant, ja das war der Bau der Diagonalfläche für sie schon. Forster bei der Einweihung: „*Für uns ging es bei dieser Arbeit nicht um Bildhauerei. Vom skulpturalen Standpunkt aus gesehen gibt es zwar einige bildhauerische Arbeiten, mit der man diese Form vergleichen könnte. [...] Für uns aber — gerade zu Beginn — hat der Bau dieser Skulptur in erster Linie eine anspruchsvolle handwerkliche Herausforderung dargestellt. Nichtsdestoweniger wurde uns während der Arbeiten an der Plastik zunehmend klar, dass diese Form, als Skulptur, in einem hohen Maße stimmig ist. Und dies aufgrund ihrer mathematischen Struktur, welche als solche fasziniert. Für mich stellt sich hier die Frage: Wenn es diese Formen ausserhalb der Bildhauerei schon gibt, was kann man dem als Bildhauer entgegensetzen oder hinzufügen*?"

Insgesamt scheint es also wenig sinnvoll, Erscheinungen wie die Skulptur der Diagonalfläche in ihrer Zwitterfunktion klar dem Bereich der Kunst oder der Mathematik zuzuordnen als vielmehr festzustellen, dass beide Bereiche gleichermassen von ihr profitieren.

Und doch kann das Modell der Diagonalfläche beiden Disziplinen ein Bedürfnis erfüllen. Für die Kunst liegt möglicherweise die Faszination darin, staunend zu erkennen, wieviel Spannung im Ebenmaß liegen kann. Währenddessen sind in der Mathematik gerade jene Objekte und Probleme interessant, die an der Grenze zur Einfachheit liegen – selbst aber schon komlex sind. Sie bilden die Keimzellen von Struktur. In ihnen werden strukturelle Grundprinzipien erkennbar. Eben eine solche Keimzelle für die algebraische Geometrie stellt die Diagonalfläche dar.

Mathematik als Bewusstseinserweiterung

Was der Bildhauer Forster die *mathematische Struktur* der Plastik nennt, ist für einen Mathematiker die Clebsche Diagonalfläche *selbst*. Als mathematisches Objekt kann sie nicht mehr als Struktur sein oder, wenn man so will, *platonische Idee*. Aber was genau ist die mathematische Struktur/Idee dieser Fläche? Es handelt sich dabei nicht (wie bei vielen Flächen Pevsners oder Gabos) um eine Regelfläche, sondern um eine – wie Mathematiker sagen – *kubische Fläche im projektiven Raum*. Hier der Versuch einer Erläuterung — das geht nicht ohne ein paar allgemeine Bemerkungen zur Mathematik.

Zwei parallele Geraden schneiden sich im Unendlichen. Für die meisten Menschen zeigt dieser Satz nur, wie sehr die Schule in der Lage ist, unsere Wahrnehmung zu verderben. Hat doch niemand je zwei parallele Geraden sich schneiden sehen. Dies dann mit der Existenz eines mythischen Ortes *Unendlich* zu erklären, wo dann der Schnitt zweier paralleler Geraden schließlich doch stattfinden soll, lässt diesen Ausspruch um so zweifelhafter erscheinen. 'Ja', wird so mancher denken, 'so kennen wir die Mathematiker: ist die Wirklichkeit nicht so, wie sie es sich wünschen, dann wird sie einfach neu definiert – bis dass sie ihren Vorstellungen entspricht.' Auch wenn dieser Vorwurf nicht ganz von der Hand zu weisen ist, muss man doch zur Verteidigung anbringen, dass dieser Ansatz die Wirklichkeit tatsächlich erweitert.

Bewusstseinserweiterung durch Mathematik sozusagen. Nimmt man nun unseren gewöhnlichen Raum, so wie wir ihn von Kindesbeinen an zu begreifen gelernt haben, und ergänzt ihn durch genau so viele unendlich ferne Punkte, dass sich alle parallele Geraden außerhalb unserer Wahrnehmung schneiden können, dann erhält man den sogenannten *projektiven Raum.*

Nun zum Begriff *kubische Fläche*. Dies zu erklären ist durchaus möglich aufgrund eines glücklichen Umstands, der mit den Griffeletuis von Generationen deutscher Pennäler zu tun hat. In diesen Griffeletuis nämlich befand sich um das neunte Schuljahr herum so eine grüne Schablone, mit der man Kurven zeichnen konnte, die – Sie werden sich erinnern – *Parabeln* genannt werden. Diese Parabeln sind Kurven, welche in der Schule meistens von oben kommend sich nach einer heftigen Kehrtwendung wieder nach oben zurückbewegen. Beschrieben werden diese Kurven durch Gleichungen in x und y – keine Angst, daran werde ich Sie nicht erinnern – in denen ein Quadrat d.h. eine zweite Potenz vorkommt. (Spätestens bei Sätzen wie: „Ypsilon gleich Iksquadrat." werden alte Erinnerungen wach: an den strengen Mathematiklehrer, an die zwei, drei Klassenkameraden, die das Ganze auch noch interessant fanden, oder aber an die eigene Begeisterung, mit der man plötzlich so alleine war.) Erlaubt man auch dritte Potenzen (Kuben) in der Gleichung, erhält man eine *kubische Kurve.*

Ziehen wir nun auch noch die *unendlich fernen Punkte* in Betracht, so sehen wir etwa, dass eine Parabel aus einer Richtung im Unendlichen kommt und dorthin wieder zurückläuft. Würde man den unendlich fernen Punkt in dieser Richtung sehen können, dann hätte die Parabel eher die Gestalt einer Ellipse. Und in der Tat, eine Ellipse ist auch eine quadratische (also zweiten Grades) Kurve – nur eine, die ganz im Endlichen lebt. Ähnlich können auch andere Kurven ganz im Endlichen leben und manchmal ist selbst dort nichts oder nur sehr wenig von ihnen zu sehen. Eine *kubische Fläche* ist nun eine Fläche, deren Gleichung höchstens dritte Potenzen, d. h. Kuben enthält. Schneidet man sie mit einer Ebene, entsteht eine kubische Kurve.

Einer der schönsten (das ist subjektiv und bezieht sich auf die innermathematische Ästhetik) Lehrsätze der algebraischen Geometrie besagt, dass auf jeder solchen kubischen Fläche im projektiven Raum, wenn man sie genügend allgemein versteht, immer exakt 27 Geraden liegen. Dies wurde schon 1849 — im Geburtsjahr Felix Kleins — von den britisch–irischen Mathematikern Arthur Cayley (1821 – 1895) und George Salmon (1819 –1904) bewiesen.

Die Clebsche Diagonalfläche ist ein besonders eindrucksvolles (sowohl innermathematisch als auch bildhauerisch) Exemplar einer kubischen Fläche im projektiven Raum. Bei ihr sind alle 27 Geraden gut zu sehen und schneiden sich auf ganz besonders interessante Art und Weise. Sie ist die einzige kubische Fläche im projektiven Raum mit genau 10 Eckardtpunkten.

Es bleibt eine unnahbare Schöne. Sie in eine Schublade stecken zu wollen, ist so verflixt wie die Quadratur des Kreises.

◇ *Dr. Rainer Kaenders, ist heute Fachdidaktiker für Mathematik an der Katholische Universität Nimwegen in den Niederlanden*