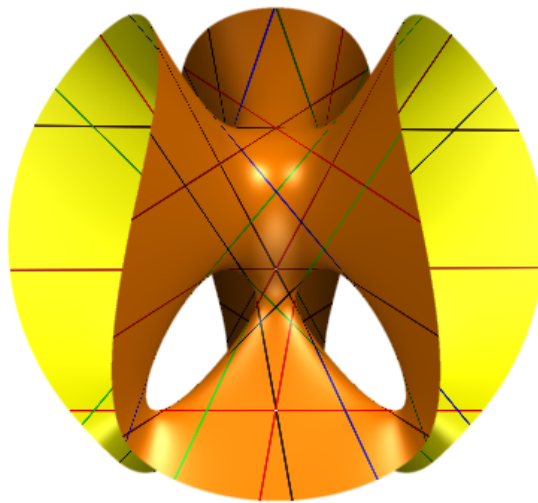


Kubische Flächen und die Coblesche Hexaederform

Diplomarbeit



vorgelegt dem Fachbereich Mathematik
an der Johannes Gutenberg Universität Mainz
im Januar 2001

von

Oliver Labs

Jakob-Welder-Weg 32 / 126
55128 Mainz

Das Thema der Arbeit stellte Herr Prof. Dr. Duco van Straten.

Inhaltsverzeichnis

Einführung	2
Historischer Überblick	4
1 Kubische Flächen	7
1.1 Polare und Hessefläche	10
1.2 Die Pentaederform	17
1.3 Kubische Flächen als in sechs Punkten aufgeblasener \mathbf{P}^2	20
2 Die 27 Geraden auf einer kubischen Fläche	31
2.1 Die 27 Geraden auf einer kubischen Fläche	31
2.2 Notationen	35
2.2.1 Salmon's Notation der 27 Geraden	35
2.2.2 Schläfli's Doppel-Sechs-Notation	36
2.3 Über die Gruppe der 27 Geraden	41
2.3.1 Überblick	41
2.3.2 Ordnung 51.840 und Isomorphie zu $W(E_6)$	42
2.3.3 Andere Darstellungen und Untergruppen	45
3 Explizite Berechnung der Gleichungen	46
3.1 Notationen	47
3.2 Die Fläche	50
3.2.1 Die Erzeuger a, \dots, f	51
3.2.2 Die Koeffizienten \bar{a}, \dots, \bar{f}	57
3.2.3 Die Gleichung der Fläche im \mathbf{P}^3	62
3.3 Die Tritangetialebenen und die Geraden	64
3.4 Affine Darstellungen	71

4	Spezielle Konfigurationen der sechs Punkte	74
4.1	Eckardt – Punkte	74
4.2	A_1 - und A_2 -Singularitäten	76
4.3	Zerfallende Flächen	83
4.4	Von Clebsch bis Cayley	94
4.4.1	Die Diagonalfäche von Clebsch	94
4.4.2	Deformationen	94
4.4.3	Die Cayley Kubik mit vier Doppelpunkten	96
	Ausblick	98
A	Der Satz von Bézout	100

Einführung

*Es ist daraus zu sehen,
daß diese Flächen fortan fast eben so leicht
und einläßlich zu behandeln sind,
als bisher die Flächen zweiten Grades.*

Jakob Steiner in [Ste, 1857]:
„Über die Flächen dritten Grades“

Um die Faszination und Schönheit, die algebraische Geometrie im Allgemeinen und kubische Flächen im Speziellen in sich bergen, einer breiteren Öffentlichkeit zugänglich zu machen, ließ bereits Clebsch im Jahr 1872 ein plastisches Modell seiner sehr symmetrischen Diagonalfäche erstellen; wenig später wurden Modelle von Flächen sogar serienmäßig hergestellt und verkauft (s. [Sch, 1911]). Unter Einsatz moderner Computer war es vor wenigen Jahren möglich, eine noch exaktere und durch Ihre Größe imposante Darstellung der Fläche aus Keramik fertigtzustellen (s. [Kae, 1999]).

Mit Hilfe eines vom Autor implementierten Computer-Programmes kann man inzwischen sogar im virtuellen Raum der kubischen Flächen herumwandern (s. [vSL, 2000]), um so die Übergänge zwischen den verschiedenen kubischen Flächen und der Geraden, die komplett in ihnen liegen, besser zu verstehen. Ursprünglich war das Ziel dieser Arbeit nur, die mathematischen Grundlagen für dieses Programm bereitzustellen und zur Abrundung einige Beispiele zu liefern, anhand derer deutlich wird, wie man das Programm einsetzen kann, um die Verhältnisse auf kubischen Flächen zu veranschaulichen.

Beim Experimentieren mit diesem Programm gewann ich aber den Eindruck, daß auch solche Konfigurationen, die normalerweise nicht betrachtet werden, weil sie mit dem üblichen Ansatz nicht interpretiert werden können, durch die Benutzung der Cobleschen Hexaederform kubische Flächen liefern die in Flächen niedrigeren Grades zerfallen und als Grenzwert nicht zerfallender kubischer Flächen angesehen werden können. Im letzten Kapitell gebe ich daher eine umfassende Beschreibung dieser Flächen und der sehr regelmäßigen Konfigurationen derjenigen darauf liegenden Geraden, die sich als Grenzgeraden der 27 Geraden auf glatten kubischen Flächen ergeben.

Da mit dem Programm die Versuche der Geometer des 19. Jahrhunderts, kubische Flächen auch intuitiv und visuell erfaßbar zu machen, fortgeführt werden, beginne ich mit einer Zusammenfassung der Entwicklungen in dieser Zeit, die durch eine umfangreiche – durch Angabe der für uns wichtigsten Inhalte erweiterte – Bibliographie ergänzt wird .

Die anschließende Einführung in die Theorie der kubischen Flächen knüpft daran an, indem zunächst durch das Vorstellen schon damals bekannter Sätze und Ideen versucht wird, dem Leser ein anschauliches Verständnis dieser Flächen zu vermitteln.

Danach lege ich kurz die modernere Behandlungsweise des Themas dar: kubische Flächen in sechs Punkten aufgeblasene projektive Ebene. Durch die Wahl bestimmter Erzeuger des Linearsystems der ebenen Kubiken durch diese sechs Punkte berechnen wir dann später explizite Gleichungen der Fläche und der 27 Geraden auf ihr in der sogenannten Cobleschen Hexaederform. Diese wird sich direkt aus den Koordinaten der sechs Punkte in der Ebene durch Ausrechnen einiger Determinanten ergeben. Da wir in diesem Kapitel allerdings die Verhältnisse der Geraden und Tritangentialebenen — Ebenen, deren Schnitt mit einer kubischen Fläche aus drei Geraden besteht —, untereinander gut kennen müssen, schieben wir davor ein Kapitel über die 27 Geraden ein, in dem alle nötigen Grundlagen geliefert werden. Haben wir schließlich die projektiven Gleichungen ermittelt, wählen wir, um die Flächen auch grafisch darstellen zu können, eine solche unendlich ferne Ebene, daß die für uns interessantesten Eigenschaften auch im affinen Bild zu sehen sind.

Den Abschluß der Arbeit bildet ein Kapitel über spezielle Konfigurationen der sechs Punkte, in dem wir erläutern, wie sich die Flächen und Geraden entwickeln, wenn die Punkte in besonderer Lage zueinander stehen. Dies sind nämlich genau die Effekte, die man beobachten kann, wenn man mit dem Programm herumspielt, indem man die sechs Punkte verschiebt. Wir studieren diese Situationen mittels der vorher aufgestellten expliziten Gleichungen in Cobles Hexaederform, was deutlich macht, wie nützlich diese für die detailgenaue Behandlung spezieller Fälle sind. Beispielsweise finden wir im Fall, in dem eine A_2 – Singularität auftritt, leicht, daß sich dort 18 Geraden der Fläche treffen, von denen je drei übereinander liegen.

Mein Dank gilt vor allen Herrn Prof. Dr. Duco van Straten, der das Thema der Arbeit stellte und der es durch Gespräche und Hinweise auf interessante Artikel schaffte, mich für kubische Flächen und deren anschauliche Betrachtungsweise zu begeistern. Außerdem danke ich Dr. Christian van Enkevort, Konrad Möhring und Thorsten Warmt, die mir in den letzten Wochen und Monaten durch ihre Fragen zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben und die sogar beim Mittagessen bereit waren, sich etwas über kubische Flächen erzählen zu lassen.

Mainz, im Januar 2001,

Oliver Labs

Historischer Überblick

*While it is doubtless true that
the classification of cubic surfaces is complete,
the number of papers dealing with these surfaces
which continue to appear from year to year
furnish abundant proof of the fact
that they still possess much the same fascination
as they did in the days of the discovery
of the twenty-seven lines upon the cubic surface.*

Archibald Henderson in [Hen, 1911]:
„*The 27 Lines upon the Cubic Surface*”

Das Unfaßbare an Hendersons Feststellung vom Beginn des 20. Jahrhunderts ist die Tatsache, daß sie heute, 90 Jahre später, immer noch nicht an Gültigkeit eingebüßt hat. So befaßt sich ja auch diese Diplomarbeit mit kubischen Flächen, da die moderne Technik einen ganz neuen visuellen Einblick in die Materie ermöglicht.

Bereits 1849 veröffentlichten die britischen Mathematiker Salmon ([Sal, 1849]) und Cayley ([Cay, 1849]) die Ergebnisse ihrer Korrespondenz über die Anzahl der Geraden auf glatten kubischen Flächen. Cayley hatte in einem Brief an Salmon die Beobachtung formuliert, daß auf einer glatten kubischen Fläche endlich viele Geraden liegen müssen, woraufhin dieser postwendend geantwortet hatte, deren Anzahl sei 27.

Kurz darauf legte dann Steiner in einem knappen aber ausgesprochen gehaltvollen Artikel ([Ste, 1857]) die Basis für eine rein geometrische Behandlung der kubischen Flächen. Darin formulierte er zwar sehr viele Sätze, lieferte zu den meisten allerdings nicht einmal die Idee eines Beweises. Viele davon finden sich dann bei Cremona ([Cre, 1868]) und Sturm ([Stu, 1867]), die dafür gemeinsam einen Preis der Königlich Akademie der Wissenschaften in Berlin erhielten. Die Schönheit und Einfachheit der von ihnen benutzten Methoden bestätigten nachträglich eine Aussage Steiners: „*Es ist daraus zu sehen, dass diese Flächen fortan fast ebenso leicht und einlässlich zu behandeln sind, als bisher die Fläche zweiten Gra-*

des". Den ersten Beweis dafür, daß man eine gegebene kubische Fläche auf Sylvesters ([Syl, 1851]) Pentaederform bringen kann, lieferte allerdings A. Clebsch in [Cle, 1861b] mit Hilfe der Hessefläche. Clebsch war es auch, der viele weitere sehr interessante Eigenschaften kubischer Flächen fand, wie zum Beispiel jene, daß eine bestimmte Covariante neunter Ordnung die kubische Fläche genau in den 27 Geraden trifft ([Cle, 1861c]) oder jene, daß man jede glatte kubische Fläche mit Hilfe von 4 ebenen kubischen Kurven durch 6 Punkte in die Ebene einbetten und umgekehrt auch wieder erhalten kann ([Cle, 1866]). Die meisten seiner Resultate sind Anwendungen allgemeinerer Aussagen über Flächen beliebigen Grades, die im Fall von kubischen Flächen meist ganz spezielle Eigenschaften aufweisen und so die Besonderheit dieser Flächen unterstreichen.

Schläfli war 1858 der erste, der begann, die kubischen Flächen nach der Anzahl ihrer reellen Geraden und Tritangentialebenen zu klassifizieren (es gibt 5 Typen, s. [Sch, 1858]), und schon fünf Jahre später veröffentlichte er einen ausführlichen Artikel ([Sch, 1863a]) darüber, der außerdem eine Klassifikation nach den auf der Fläche enthaltenen Singularitäten (23 Typen) beinhaltet. Cayley übernahm diese in seinem darauf aufbauenden *Memoir on Cubic Surfaces* ([Cay, 1869]). Rodenberg dagegen stellte sich in [Rod, 1879] die Frage, welche Flächen einem gegebenen Pentaeder angehören.

Als Anfang der siebziger Jahre einiges über kubische Flächen bekannt war, machte man sich daran, Modelle zu konstruieren, um die abstrakt so schönen und regelmäßigen Objekte auch visuell erfassen zu können. Das erste, „noch ganz unsymmetrische, durch empirische Konstruktion hergestellte“ ([Kle, 1922, S. 1]) stammt von Christian Wiener. Als Vorreiter im Bereich der Modelle kubischer Flächen ist aber Klein zu nennen, der schon 1871 einige Zinkexemplare herausgab. 1872 präsentierte dann Clebsch ein sehr regelmäßiges Modell der Diagonalfäche, auf dem auch die 27 reellen Geraden zu sehen waren (s. dazu [Cle, 1871, §§16-18]. Davon inspiriert erstellte Rodenberg später 27 kubische Flächen aus Gips, die die verschiedenen Typen von Singularitäten aufweisen (für Fotos s. [Fis, 1986], für math. Erläuterungen s. [Rod, 1904]). Um die Jahrhundertwende wurden Modelle kubischer Flächen sogar richtig populär – Klein stellte beispielsweise einige auf der 1894 in Chicago stattfindenden Weltausstellung vor.

Die ja schon 1849 entdeckten 27 Geraden gewannen großes gruppentheoretisches Interesse, als Jordan bewies, daß die Lösungen der Gleichung, von der sie abhängen, nicht durch Gleichungen niedrigeren Grades gefunden werden können, da deren einfache Index-2-Untergruppe keine Untergruppe vom Index kleiner als 27 enthält ([Jor, 1957, S. 319-329]). Seitdem wurde diese Galoisgruppe sehr viel erforscht; hier ist beispielsweise Dickson zu nennen, der eine Reihe von Artikeln zum Thema und ein Buch ([Dic, 1901]) veröffentlichte, das auch diese Gruppe und deren einfache Index-2-Untergruppe der Ordnung 25.920 ausführlich behandelt (S. 303-307 etc.).

Die Basis für die vorliegende Diplomarbeit legte 1915 Arthur B. Coble in [Cob, 1915]. Schon bekannt war zu diesem Zeitpunkt zwar, daß sechs kubische Kurven durch

sechs Punkte in der Ebene auf eine kubische Fläche abgebildet werden können ([Cle, 1866]). In diesem Artikel gibt er aber explizit, abhängig von den 6 Punkten, die Gleichungen der Fläche und der Tritangentialebenen an. Dies werde ich im Abschnitt 3 auf Seite 46 ausführlich und noch expliziter darstellen, da hierdurch die *Cubic Surface Homepage* ([vSL, 2000]) in der existierenden Form erst möglich wurde.

Wie schon zu Beginn angedeutet, wurde auch in der Folgezeit immer noch sehr vieles über kubische Flächen und die 27 Geraden geschrieben. Lehrbücher, die eigene Abschnitte für dieses Thema reserviert haben sind beispielsweise [Har, 1977] und [Rei, 1988]. Es gibt sogar ganze Werke darüber; neben der schon etwas älteren Monographie von Henderson ([Hen, 1911]) sind hier beispielsweise [Seg, 1942], [Man, 1974] und [DO, 1988] zu erwähnen. Ganz aktuelle Artikel zum Thema sind, um nur zwei zu nennen: [PT, 2000] und [FM, 2000]. Für weitere Literatur verweise ich auf die durch Stichworte ergänzte Bibliographie und die Referenzen in obigen Werken.

Kapitel 1

Kubische Flächen

Eine *kubische Fläche* ist das Nullstellengebilde eines homogenen kubischen Polynoms im $\mathbf{P}^3 := \mathbf{P}^3(\mathbf{C})$, besteht also aus allen $(x : y : z : w) \in \mathbf{P}^3$, die eine Gleichung der Form

$$a_0x^3 + a_1x^2y + \dots + a_{18}w^2z + a_{19}w^3 = 0,$$

erfüllen, wobei $a_i \in \mathbf{C}$, $i = 0, \dots, 19$. Wir beschränken uns in dieser Arbeit zwar auf die Betrachtung reeller kubischer Flächen, d.h. solchen Flächen, deren Koeffizienten $a_i \in \mathbf{R} \forall i = 0, 1, \dots, 19$ liegen, werden die Theorie allerdings über \mathbf{C} vorstellen, da wir dies manchmal benötigen; beispielsweise für Korollar 1.20 auf Seite 28.

Zunächst einige Beispiele. Die kubische Fläche in Abbildung 1.1 mit der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x + y + z + w)^3 = 0$ ist die sogenannte Diagonalfäche von Clebsch (für die affine Darstellung haben wir $w = 2 \cdot (1 - x - y - z)$ gewählt, s. auch Abschnitt 3.4). Auf ihr liegen — wie auf jeder glatten kubischen Fläche — genau 27 verschiedene Geraden (s. Kap. 2 ab S. 31), die im Fall der Clebschfläche sogar alle reell und daher im Bild (Abb. 1.1) zu erkennen sind.

Mit „eine Gerade liegt auf einer Fläche“ ist hier einfach gemeint, daß alle Punkte $(x : y : z : w)$, die die Geradengleichungen (eine Gerade ist Schnitt zweier Ebenen, s. Anhang A) erfüllen, auch der Gleichung der Fläche genügen.

Die auf der Cayley Kubik $(x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - \frac{1}{4}(x + y + z + w)^3 = 0$, Abb. 1.2) liegenden Geraden sind zwar auch alle reell. Wegen der vier Doppelpunkte liegen aber viele der 27 übereinander, so daß tatsächlich nur 9 verschiedene Geraden zu sehen sind. Im Abschnitt 4.2. werden wir erläutern, warum 6 dieser 9 Geraden vierfach gezählt werden, so daß sich doch wieder 27 Geraden ergeben.

Außer solchen kubischen Flächen, auf denen alle Geraden im Reellen liegen, gibt es jene, bei denen dies nicht der Fall ist. Wir werden uns in dieser Arbeit allerdings meist auf den ersten Fall beschränken - und hier im Speziellen auf glatte kubische Flächen sowie solche, deren einzige Singularitäten vom Typ A_1 oder A_2 sind oder

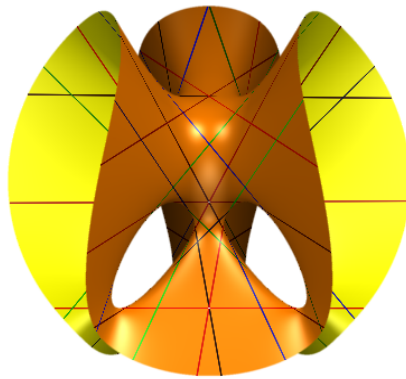


Abbildung 1.1: Die Diagonalfäche von Clebsch

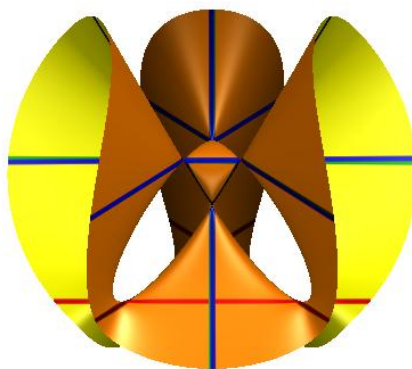


Abbildung 1.2: Die Cayley Kubik

die in mehrere Komponenten niedrigeren Grades zerfallen. Aus der Menge der anderen kubischen Flächen stellen wir nur kurz zwei Beispiele vor.

Die kubische Fläche mit der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - \frac{1}{8}(x + y + z + w)^3 = 0$ (Abb. 1.3) besteht aus zwei Zusammenhangs-Komponenten (dem zur Sphäre S^2 homöomorphen Teil in der Mitte und dem Rest) und nur 3 der 27 Geraden liegen im Reellen.

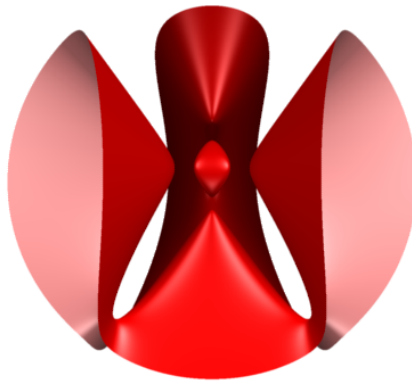


Abbildung 1.3: Eine kubische Fläche, die, topologisch gesehen, aus zwei Komponenten besteht: $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - \frac{1}{8}(x + y + z + w)^3 = 0$.

Die Fläche mit der Gleichung $wxz - y^2z - x^3 = 0$ hat einen A_5 - und einen A_1 -Doppelpunkt (Abb. 1.4).

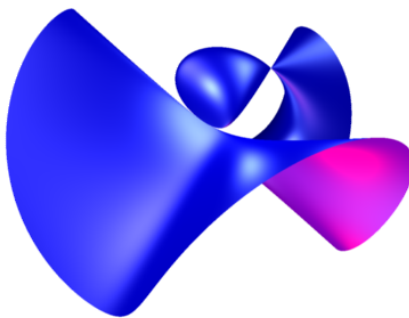


Abbildung 1.4: Eine kubische Fläche mit einem A_5 - und einem A_1 -Doppelpunkt: $wxz - y^2z - x^3 = 0$.

Eine Klassifikation der kubischen Flächen nach ihren Singularitäten findet sich

erstmal bei Schläfli ([Sch, 1863a]). Wenig später verfaßte auch Cayley einen ausführlichen Artikel zu diesem Thema ([Cay, 1869]). Ebenfalls finden sich die Gleichungen der Flächen der verschiedenen Spezies, gemeinsam mit den Gleichungen der Geraden und teilweise auch Vorschlägen zur Wahl der freien Parameter bei Henderson [Hen, 1911].

Jeweils drei Geraden auf einer kubischen Fläche erhält man, indem man die Fläche mit einer deshalb sogenannten Tritangentialebene schneidet. Die Ermittlung dieser speziellen Ebenen ist im Allgemeinen nicht einfach und wird für kubische Flächen, die als Blow-Up des \mathbf{P}^2 in 6 Punkten gegeben sind, im Kapitel 3 behandelt.

1.1 Polare und Hessefläche

Auf einer kubischen Fläche gibt es aber noch andere Kurven, die einiges über die Fläche verraten und wesentlich einfacher zu berechnen sind: der Schnitt der Fläche mit einer ihrer Polaren in einem gegebenen Punkt bzw. mit ihrer Hesseschen.

Kurz gesagt ist die Polare $\Delta_p F$ an eine Fläche F in einem Punkt P (möglicherweise außerhalb der Fläche gelegen) diejenige Fläche, deren Schnitt mit F genau aus allen singulären und all jenen glatten Punkte besteht, deren Tangentialraum an F den Punkt P enthält (Satz 1.2). Die Hessesche HF dagegen schneidet F in ihrer parabolischen Kurve (s. Satz 1.4 und [HCV, 1932, §§28,29]).

Besonders gut sind diese beiden Konzepte im Fall von Kurven zu verstehen. Hier sind sowohl Polare als auch Hessesche ebenfalls Kurven und deren Schnitt mit der Ursprungskurve besteht aus einzelnen Punkten, neben den Singularitäten nämlich den Berührungspunkten von Tangenten durch einen Punkt bzw. den Wendepunkten der Kurve. Der Satz von Bézout (A.2) liefert dann Aussagen über die Anzahl solcher Punkte. Fischer stellt dies in [Fis, 1994] ausführlich dar; wir betrachten diesen Fall nur (Abb. 1.5), um Polare und Hessesche kubischer Flächen besser zu verstehen.

Definition 1.1 Sei $F \in \mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]_d$ ein homogenes Polynom vom Grad d mit Koeffizienten in \mathbf{C} und $p = (p_0, \dots, p_n) \in \mathbf{P}^n$. Dann heißt das Polynom

$$\Delta_p F := \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \in \mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]_{d-1}$$

die Polare von F bezüglich p . Ist $X = V(F)$, so schreiben wir $\Delta_p X$ für die Varietät $V(\Delta_p F)$.

Satz 1.2 (Beschreibung der Polaren)

Sei $X = V(F)$ und $a \in X \setminus \text{Sing}(X)$ ein glatter Punkt von X . Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

1. Der Punkt a liegt auf der Polaren von X bezüglich p , d.h. $a \in \Delta_p X$.
2. Der Tangentialraum $T_a X$ enthält den Punkt p .

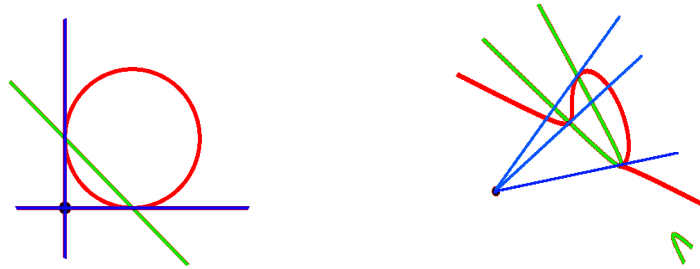
Beweis: p liegt genau dann in $T_a X$, wenn das Tupel (p_0, \dots, p_n) eine Lösung der Gleichung

$$\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = 0$$

ist. Dies heißt aber genau, daß

$$\sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = 0,$$

also $\Delta_p(a) = 0$ bzw. $a \in \Delta_p X$ gilt. □



- (a) Die Polare einer glatten Kurve bezüglich eines Punktes schneidet die Kurve in den Berührungspunkten der Tangenten durch den Punkt.
- (b) Eine Polare und die Tangenten an die Neilsche Parabel $X_2^3 + X_0 X_1^2$.

Abbildung 1.5: Polare an Kurven

Uns interessieren hier vornehmlich die Polaren von kubischen Flächen; daher geben wir auch hierzu einige Beispiele (Abb. 1.6, 1.7, 1.8, 1.9). Polaren von Flächen vom Grad drei sind Flächen vom Grad zwei (*Quadriken*), von denen gibt es nur wenige verschiedene Typen gibt (s. [HCV, 1932, §§3,4] für einen knappen Überblick und [Sal, 1879] für eine ausführlichere Darstellung); die Abbildungen zeigen, bis auf das einschalige Hyperboloid (s. dazu Abb.2.2 auf Seite 36) alle wesentlichen.

Nun zur Hessefläche, deren Schnitt mit der ursprünglichen Fläche die parabolische Kurve liefert.

Definition 1.3 Sei $F \in \mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]_d$. Dann heißt das Polynom

$$HF := \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right) \in \mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]_{(d-2)(n+1)}$$

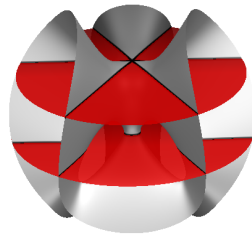


Abbildung 1.6: Die Polare an die Diagonalfäche von Clebsch bezüglich des Punktes „oben“ auf der Fläche (der hier selbst ein Punkt der Polare und der Fläche ist); diese Fläche vom Grad 2 zerfällt hier in zwei Ebenen.

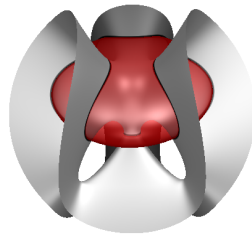


Abbildung 1.7: Die Polare an die Diagonalfäche von Clebsch bezüglich eines Punktes „im Herzen“ der Fläche ist ein sogenanntes Ellipsoid.

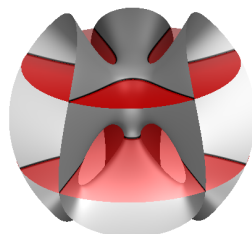


Abbildung 1.8: Die Polare an die Diagonalfäche von Clebsch bezüglich eines Punktes „leicht oberhalb des Herzens“ der Fläche ist ein sogenanntes zweischaliges Hyperboloid.

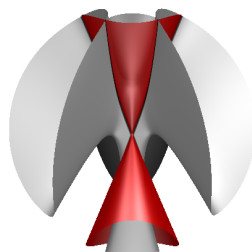


Abbildung 1.9: Hier ist die Polare ein Kegel - dieser Fall tritt ein, wenn der Pol auf der Hessefläche liegt.

die Hessesche von F . Die Varietät $HX := V(HF) \subset \mathbf{P}^n$ nennen wir die Hessesche von $X = V(F) \subset \mathbf{P}^n$. Im Fall $n \geq 3$ sprechen wir auch von der Hessefläche.

Satz 1.4 (Die parabolische Kurve)

Der Schnitt einer glatten Fläche $F \subset \mathbf{P}^3$ mit ihrer Hesseschen besteht genau aus der parabolischen Kurve, das heißt der Kurve der Punkte, in denen eine allgemeine Tangente die Fläche dreipunktig berührt (Abb. 1.11).

Beweis: In [Sal, 1880, S. 29, 30] zeigt dies Salmon, indem er zunächst nachweist, daß die quadratische Polarfläche (im Fall kubischer Flächen ist die quadratische Polare einfach die oben definierte Polare, da sich hier schon durch einfaches Differenzieren eine Quadrik ergibt) für einen Punkt auf der parabolischen Kurve einer Fläche ein Kegel ist und umgekehrt, daß der Ort der Punkte, deren quadratische Polaren in Bezug auf die Fläche Kegel sind, die Fläche auf der parabolischen Kurve schneidet. Dieser Ort ist aber nichts anderes als die Hessefläche (auch Determinanten- oder, nach Steiner, Kernfläche genannt). \square

Zur Erläuterung geben wir auch zwei Beispiele für die entsprechenden Verhältnisse in der Ebene (Abb. 1.10).



- (a) Eine Kurve vom Grad 3 und ihre Hessesche, die sie in ihrem einzigen reellen Wendepunkt, der in dieser affinen Darstellung sichtbar ist, schneidet.
- (b) Eine Kurve vom Grad 3 und ihre Hessesche. Hier sind zwei Wendepunkte sichtbar.

Abbildung 1.10: Kurven (rot) und ihre Hesseschen (grün)

Doch die Hessefläche hat noch mehr und für das Verständnis kubischer Flächen interessantere Eigenschaften. Bei Salmon-Fiedler ([Sal, 1880, §28]) findet sich beispielsweise der folgende Satz:

Satz 1.5 (Jede Gerade berührt die parabolische Kurve)

Wenn eine gerade Linie ganz in einer Fläche enthalten ist, so berührt sie die Fläche ihrer Hesseschen Determinante und somit die Kurve ihrer parabolischen Punkte.

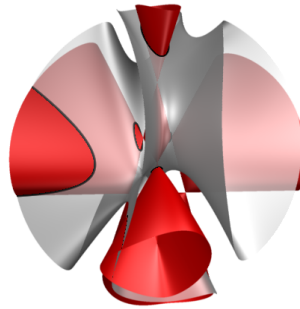
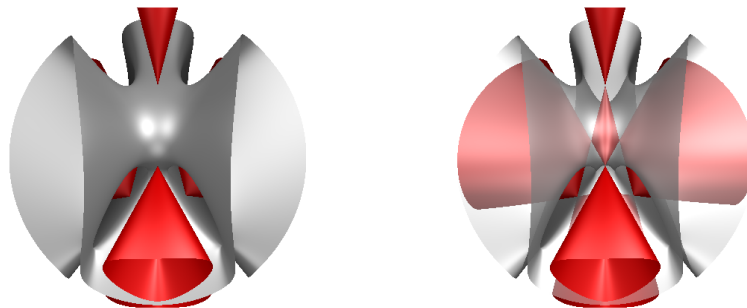


Abbildung 1.11: Eine kubische Fläche mit zufälligen Koeffizienten und ihre Hessefläche. Deren Schnitt ist — nach Bézout — eine Kurve vom Grad $4 \cdot 3 = 12$.



(a) Die Diagonalfäche (grau) und ihre Hessefläche (rot). (b) Wie (a), die Diagonalfäche ist aber leicht transparent dargestellt.

Abbildung 1.12: Die Hessesche der Diagonalfäche trifft diese im Reellen nur in einzelnen Punkten. Die parabolische Kurve dieser speziellen Fläche besteht also im Reellen nur aus endlich vielen Punkten.

Beweis: Wählt man die Koordinaten so, daß die Gleichung der Fläche geschrieben werden kann als $f = x_1\Phi + x_2\Psi = 0$, so ergibt sich der Schnitt der Geraden $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ mit der Fläche durch die Substitution dieser beiden Werte in deren Hessesche. Da aber $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_4}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_4}$ Terme sind, die entweder x_1 oder x_2 als Faktor beinhalten, verschwinden diese Größen und die Determinante der symmetrischen Hesse-Matrix $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 \end{pmatrix}$ vereinfacht sich zu $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_4} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_4} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_3})^2$.

Die Gerade berührt die Hessesche also in jedem Punkt, in dem sie sie trifft. \square

Salmon führt weiter aus, daß diese Berührung $2(n - 2)$ -fach ist; im Fall kubischer Flächen berührt eine Gerade der Fläche also die parabolische Kurve sogar in 2 Punkten (oder in einem doppelt). Da glatte kubische Flächen 27 Geraden enthalten (s. Kapitel 2), lernen wir daraus schon einiges über deren Lage (Abb. 1.13).

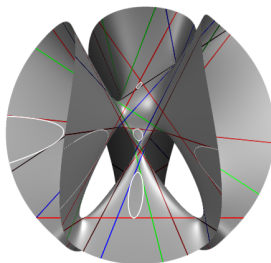


Abbildung 1.13: Eine Gerade berührt den Schnitt der Fläche mit ihrer Hesseschen (weiß), ihrer sog. parabolischen Kurve.

Betrachten wir nun noch den speziellen Fall der Diagonalfäche, die im Reellen von ihrer Hesseschen genau in deren 10 Doppelpunkten getroffen wird (s. Abb. 1.12 und [Kle, 1873, S. 33]), um dadurch kubische Flächen, die nur wenig von der Diagonalfäche abweichen, anschaulich besser zu verstehen.

Ändern wir dementsprechend die Koeffizienten der Fläche leicht, so daß die Hessesche nun eine kreisähnliche Kurve in der Umgebung des Punktes P , der zuvor einer der Doppelpunkte der Hesseschen der Diagonalfäche war, aus der Fläche schneidet. Die dortige Tangentialebene T_P schneidet dann aus der Fläche im Reellen den Punkt P selbst und zusätzlich drei hyperbelähnliche Äste (s. Abb. 1.14), da die Fläche „außerhalb“ der parabolischen Kurve hyperbolisch und „innerhalb“ elliptisch gekrümmt ist (s. [Kle, 1873] und [Sal, 1880, Kap. I, Art. 7 etc.]; eine sehr schöne, anschauliche Erläuterung dieser Krümmungsbegriffe liefert Hilbert in [HCV, 1932, §§28,29]).

Lassen wir nun die Koeffizienten wieder gegen die der Diagonalfäche konvergieren, so müssen diese drei hyperbelähnlichen Äste kontinuierlich in eine Kurve übergehen, die zusammenhängend ist, da die Fläche im Fall des zum Punkt degenerierten Kreises in diesem nach allen Seiten hin hyperbolisch gekrümmt ist. Alle drei vorherigen Hyperbeläste gehen also durch den Punkt; da aber eine aus drei solchen

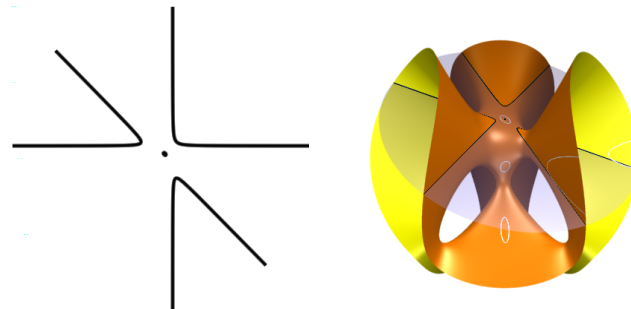
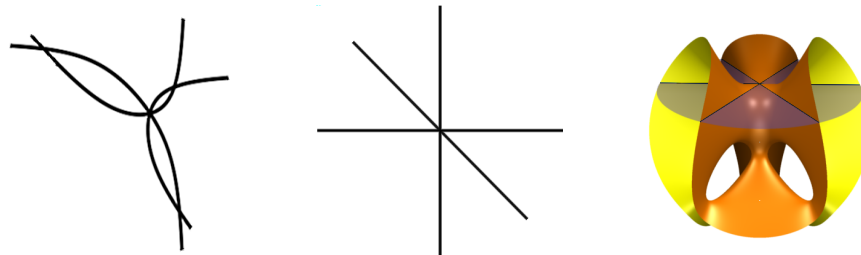


Abbildung 1.14: Drei hyperbelähnliche Äste und der Punkt selbst.

sich in einem reellen Punkt treffenden reellen Hyperbelästen bestehende Kurve keine ebene kubische Kurve sein kann (s. hierzu Abb. 1.15 (a) und [Fis, 1994]) und aus Symmetriegründen keiner der Äste anders aussehen kann als die anderen, muß jeder der Äste degenerieren zu zwei Halbgeraden (Abb. 1.15 (b), (c)).



(a) Dies ist keine ebene Kubik. (b) Der Schnitt zerfällt in drei Geraden. (c) Die drei Geraden auf der Fläche.

Abbildung 1.15: Drei hyperbelähnliche Äste, die sich in einem Punkt treffen sind keine ebene kubische Kurve.

Insgesamt ergeben sich also drei Geraden durch den auf der (glatten) Diagonalfäche gelegenen Doppelpunkt der Hessefläche; solche Punkte bekommen einen eigenen Namen:

Definition 1.6 *Ein Punkt auf einer glatten kubischen Fläche, in dem sich 3 Geraden treffen, heißt Eckardt-Punkt.*

Satz 1.7 (Die 10 Eckardt-Punkte der Diagonalfäche)

In den 10 Doppelpunkten der Hesseschen der Diagonalfäche treffen sich je drei Geraden der Fläche. Diese 10 Punkte sind somit genau ihre 10 Eckardt-Punkte.

Man kann dies auch noch anders einsehen (s. [Kle, 1873]). Die Tangenten an einen

isolierten Punkt der parabolischen Kurve einer Fläche dritten Grades berühren im Allgemeinen dreifach. Drei der Tangenten berühren aber sogar vierfach und müssen daher nach Bézout schon komplett in der Fläche dritten Grades enthalten sein. Geht man jetzt von den drei Geraden, die sich auf der Diagonalfäche in einem Punkt treffen aus und ändert die Koeffizienten der Fläche wiederum leicht, so daß der Punkt zu einer kreisähnlichen Kurve C wird, so müssen aufgrund der Kontinuität des Übergangs also genau drei Geraden diese Kurve C tangieren.

Doch nun genug der Worte zur Krümmung kubischer Flächen; auf der *Cubic Surface Homepage* ([vSL, 2000]) sind einige Filme zu finden, die die angesprochenen und weitere Effekte demonstrieren. Außerdem kann man dort auch mit dem Programm selbst experimentieren. Dieser Arbeit liegen einige Daumenkinos bei, anhand derer man die geschilderten Effekte ebenfalls beobachten kann.

1.2 Die Pentaederform

Die Krümmung einer Fläche ist zwar für ihr anschauliches Verständnis hilfreich. Für die Struktur kubischer Flächen ist allerdings eine weitere Eigenschaft der Hesseschen wichtiger, die letztlich der Grund für die Existenz des sogenannten Sylvesterschen Pentaeders ist. Neben der Hessefläche existiert nämlich noch eine weitere, mit ihr zusammenhängende Fläche, die für kubische Flächen mit der Hesseschen übereinstimmt. Steiner nannte diese beiden Flächen Kernfläche und konjugierte Kernfläche ([Ste, 1857]).

Die Polare $\Delta_y f = \sum_{i=1}^4 y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ einer Fläche $f = 0$ im \mathbf{P}^3 mit Koordinaten x_i bezüglich eines Punktes $(y_1 : \dots : y_4)$ hat genau dann einen *Knotenpunkt* (eine Singularität) in $(x_1 : \dots : x_4)$, wenn

$$\sum_{i=1}^4 y_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = 0 \quad \forall j = 1, 2, 3, 4. \quad (1.1)$$

Wie schon weiter oben gesehen, liegen also die Knotenpunkte solcher Polaren auf der Hessefläche und umgekehrt ist jeder Punkt der Hesseschen als Knotenpunkt einer Polare anzusehen. Deren zugehörige Pole liegen auf einer anderen Fläche Ω , die sich durch Elimination der x_i aus den Gleichungen (1.1) ergibt. Für Flächen dritter Ordnung sind Ω und Hf aber identisch, da die x_i und die y_i in (1.1) vertauscht werden dürfen; für jedes homogene quadratische $g = a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_1 x_3 + \dots + a_{10} x_4^2$ (also auch für $g = \frac{\partial f}{\partial x_j}$) gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \sum y_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = & 2a_1 y_1 x_1 + a_2 y_1 x_2 + a_3 y_1 x_3 + a_4 y_1 x_4 \\ & + a_2 y_2 x_1 + 2a_5 y_2 x_2 + a_6 y_2 x_3 + a_7 y_2 x_4 \\ & + a_3 y_3 x_1 + a_6 y_3 x_2 + 2a_8 y_3 x_3 + a_9 y_3 x_4 \\ & + a_4 y_4 x_1 + a_7 y_4 x_2 + a_9 y_4 x_3 + 2a_{10} y_4 x_4, \end{aligned} \quad (1.2)$$

wo offenbar die x_i und die y_i vertauscht werden können. Bei kubischen Flächen liegen also auf der Hessefläche auch noch alle Pole von Polaren, die einen Knotenpunkt haben.

Nach einigen weiteren Überlegungen folgert Clebsch daraus in [Cle, 1861b, S. 196]:

Satz 1.8

Die Fläche $4(n-2)^{ter}$ Ordnung $Hf = 0$, in welcher sämtliche Knotenpunkte von Polaren liegen, die aus einer Fläche n^{ter} Ordnung entspringen, enthält selbst $10(n-2)^3$ Knotenpunkte; jeder dieser $10(n-2)^3$ Punkte kann Knotenpunkt von unendlich vielen Polaren werden, und die zugehörigen Pole bilden $10(n-2)^3$ Gerade. Alle Pole aber, deren Polaren einen Knotenpunkt haben, liegen auf einer Fläche $4(n-2)^{3ter}$ Ordnung $\Omega = 0$; und diese enthält also nothwendig jene $10(n-2)^3$ Geraden.

Im Fall kubischer Flächen liegen also auf der Hessefläche $Hf = \Omega$ nicht nur 10 Doppelpunkte, sondern außerdem noch 10 Geraden, in denen die den Doppelpunkten entsprechenden Pole liegen. Doch damit nicht genug; zwischen diesen Geraden und Punkten besteht die folgende Beziehung: Jede der 10 Geraden geht durch drei der 10 Knotenpunkte und der zu dieser Geraden gehörige Knotenpunkt liegt im Schnitt der drei Geraden, die den drei auf der Gerade liegenden Knotenpunkten entsprechen.

Nach einigen weiteren Berechnungen ergeben sich schließlich die von Sylvester erstmals aufgestellten und von Clebsch in [Cle, 1861b, S. 209, S. 223] bewiesenen Sätze (s. auch [Sal, 1880], S. 381 ff.) über den *Pentaeder einer kubischen Fläche* (einem Gebilde, das aus fünf Ebenen besteht; die Abbildung 1.17 zeigt den Pentaeder der Clebsch-Fläche):

Satz 1.9 (Der Pentaeder)

Die 10 Knotenpunkte sind die Ecken eines vollständigen Pentaeders, und die 10 Geraden die Kanten desselben; und zwar so, dass einem durch drei Ebenen bestimmten Punkte diejenige Gerade entspricht, welche durch die anderen beiden Ebenen bestimmt wird.

Satz 1.10 (Die Pentaederform einer kubischen Fläche)

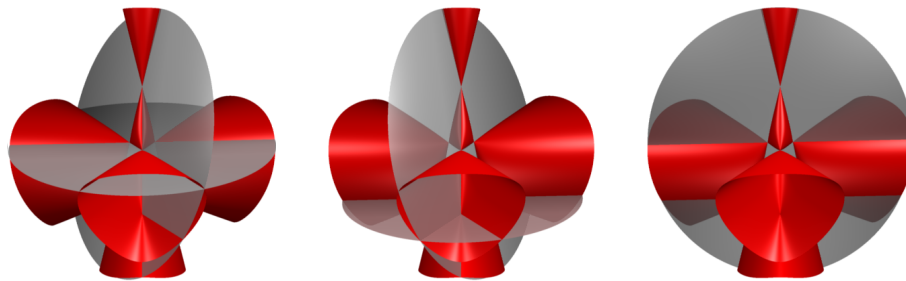
Eine homogene Function dritter Ordnung von vier Veränderlichen $F(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ kann im Allgemeinen auf eindeutige Weise als Aggregat von fünf Cuben linearer Ausdrücke dargestellt werden, zwischen deren Argumenten dann eine lineare Beziehung besteht; und zwar erfordert dies nur die Auflösung einer einzigen Gleichung fünften Grades. Also:

$$F = a_1 y_1^3 + a_2 y_2^3 + a_3 y_3^3 + a_4 y_4^3 + a_5 y_5^3 = 0,$$

wobei $a_i \in \mathbf{C} \forall i = 1, 2, \dots, 5$ und für die in $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ linearen y_i gilt: $y_1 + \dots + y_5 = 0$.



Abbildung 1.16: Die Hessefläche der Diagonalfäche von Clebsch; 3 der 10 Knotenpunkte liegen in der unendlich fernen Ebene (s. Abschnitt 3.4).



(a) Die Ebenen $\{x=0\}$ und $\{w=0\}$. (b) Die Ebenen $\{z=0\}$ und $\{x+y+z+w=0\}$. (c) Die Ebene $\{y=0\}$.

Abbildung 1.17: Die Hessefläche der Diagonalfäche von Clebsch ($H(x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x+y+z+w)^3) = 0$) und die fünf Ebenen des Pentaeders ($x = 0, y = 0, z = 0, w = 0, x + y + z + w = 0$), die jeweils vier Geraden aus der Hessefläche schneiden. Jede Gerade geht durch drei der zehn Doppelpunkte, von denen in dieser affinen Darstellung allerdings nur 7 zu sehen sind (hier haben wir $w = 2 \cdot (1 - x - y - z)$ gewählt, s. Abschnitt 3.4).

Existenz von Eckardtpunkten

Die Pentaederform der kubischen Fläche hat einige Vorteile. Beispielsweise lassen sich die Gleichungen der Ebenen, die den Pentaeder bilden, sofort ablesen. Außerdem kann man die Existenz von Eckardt-Punkten, also solchen Punkten, in denen sich drei Geraden in einem Punkt treffen, der Gleichung ansehen. Sind nämlich zwei der Koeffizienten $a_i = a_j, i \neq j$, gleich, so ist die entsprechende Ebene $y_i + y_j = 0$ eine Eckardt-Ebene, d.h. eine Tritangentialebene, deren Schnitt mit der Fläche aus drei sich in einem Punkt treffenden Geraden besteht. Für oBdA. $i = 1, j = 2$ hat man nämlich in diesem Fall:

$$\begin{aligned} F \cap \{y_1 + y_2 = 0\} &= \{a_1 y_1^3 + a_2 y_2^3 + a_3 y_3^3 + a_4 y_4^3 + a_5 y_5^3 = 0\} \\ &= \{a_1 \cdot (y_1^3 + y_2^3) + a_3 y_3^3 + a_4 y_4^3 + a_5 y_5^3 = 0\} \\ &= \{a_3 y_3^3 + a_4 y_4^3 + a_5 y_5^3 = 0\} \end{aligned}$$

und unter Benutzung von $y_1 + \dots + y_5 = 0 \Leftrightarrow y_5 = -(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = -(y_3 + y_4)$ (auf der Ebene $y_1 + y_2 = 0$) somit

$$F \cap \{y_1 + y_2 = 0\} = \{a_3 y_3^3 + a_4 y_4^3 - a_5 (y_3 + y_4)^3 = 0\}.$$

Dieser Schnitt besteht also, da nach der homogenen Version des Fundamentalsatzes der Algebra eine solche Kubik in drei Linearfaktoren der Form $(ay_3 + by_4)$ zerfällt, die jeweils eine Ebenengleichung darstellen, aus drei Geraden, die alle durch den Punkt $(1 : -1 : 0 : 0 : 0)$ gehen.

Aus der Pentaederform der Diagonalfäche von Clebsch $(x^3 + y^3 + z^3 + w^3 + u^3 = 0$ mit $x + y + z + w + u = 0)$ sieht man somit sofort, daß diese Fläche die $\binom{5}{2} = 10$ Eckardt-Punkte der Form $(1 : -1 : 0 : 0 : 0), (1 : 0 : -1 : 0 : 0), \dots, (0 : 0 : 0 : 1 : -1)$ hat. Außerdem ist aus dieser Form der Gleichung zu sehen, daß die Clebsch-Fläche invariant unter der Permutationsgruppe Σ_5 ist.

Rodenberg nutzt den Pentaeder noch intensiver aus; in [Rod, 1879] klassifiziert er die kubischen Flächen, indem er von den verschiedenen möglichen Pentaeder-Konstellationen ausgeht. Beispielsweise können alle Ebenen verschieden und reell sein, zwei der Pentaeder-Flächen zueinander komplex konjugiert sein etc.

1.3 Kubische Flächen als in sechs Punkten aufgeblasener \mathbf{P}^2

Clebsch zeigte in [Cle, 1866] erstmals, daß man alle glatten kubischen Flächen durch Aufblasen des \mathbf{P}^2 in sechs Punkten allgemeiner Lage erhält (auch wenn er das nicht so nannte). Da wir diesen Ansatz, der zuerst von Clebsch genutzt wurde ([Cle, 1866]), im Kapitel 3 nutzen, um durch die Wahl spezieller Erzeuger des Linearsystems aller Kubiken durch die sechs Punkte explizite Gleichungen der

Fläche und der Geraden zu erhalten, stellen wir in diesem Abschnitt die benötigten Begriffe und Fakten zusammen (s. [Har, 1977, S. 399 ff] für eine ausführlichere Darstellung).

Linearsysteme

Sei $L \subset \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]_d$ ein linearer Unterraum der homogenen Polynome vom Grad d in $n + 1$ Variablen. $|L| := \mathbf{P}(L)$ heißt dann *lineares System von L* .

Sei $\varphi_0, \dots, \varphi_m$ eine k -Basis von $|L|$. Die Menge der gemeinsamen Nullstellen dieser Polynome $B_L := B_{|L|} := V(\varphi_0, \dots, \varphi_m) \subset \mathbf{P}^n$ heißt dann *Basis-Lokus von $|L|$* .

Außerhalb dieser Menge ist φ_L definiert:

$$\varphi_L : \mathbf{P}^n \setminus B_L \longrightarrow \mathbf{P}^m, (x_0, \dots, x_n) \longmapsto (\varphi_0(x) : \dots : \varphi_m(x)).$$

Sind nun Z_0, \dots, Z_m Koordinaten des \mathbf{P}^m , so sind die *System-Hyperflächen* definiert als Urbilder von Hyperebenen unter φ_L :

$$\varphi_L^{-1}(H) = V\left(\sum \lambda_i \varphi_i\right) \cap (\mathbf{P}^n \setminus B), \quad H = V\left(\sum \lambda_i Z_i\right) \subset \mathbf{P}^m.$$

Manchmal bezeichnen wir den Abschluß $\overline{\varphi_L^{-1}(H)} \subset \mathbf{P}^n$ einer solchen System-Hyperfläche ebenfalls als System-Hyperfläche. Ist $n = 2$ und besteht B_L nur aus endlich vielen Punkten, so sprechen wir auch von *Systemkurven*; dies (genauer gesagt deren Abschluß im \mathbf{P}^2) sind also Kurven im \mathbf{P}^2 , die durch alle Punkte $P \in B_L$ gehen.

Wir werden später den Fall betrachten, in dem B_L aus sechs Punkten des \mathbf{P}^2 besteht und die Systemkurven Kubiken durch diese sechs Punkte sind (da eine Konik bereits durch fünf Punkte eindeutig festgelegt ist), sind Kubiken die Kurven kleinsten Grades, die durch sechs beliebige Punkte gehen).

Die Segre-Einbettung

Seien $r, s \in \mathbf{N}$ beliebig. Die Einbettung

$$\sigma : \mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^s \hookrightarrow \mathbf{P}^N, N = (r + 1)(s + 1) - 1, (x_i, y_i) \longmapsto (x_i y_j)_{i,j}$$

heißt *Segre-Einbettung*.

Wir können vermöge dieser Einbettung also jedes kartesische Produkt zweier endlich-dimensionaler projektiver Räume wieder als projektive Varietät auffassen. Ein Beispiel: $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^1 \hookrightarrow \mathbf{P}^5, (x : y : z, (u : v) \longmapsto (xu : yu : zu : xv : yv : zv))$.

Der Graph von φ_L

Der Graph von φ_L ist definiert als

$$\Gamma(\varphi_L) := \{(x, \varphi_L(x)) \in (\mathbf{P}^n \setminus B) \times \mathbf{P}^m\} \subset \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m.$$

Vermöge der Segre-Einbettung können wir diesen als Teilmenge eines projektiven Raumes der Dimension $M = (n + 1)(m + 1) - 1$ auffassen: $\Gamma(\varphi_L) \subset \mathbf{P}^M$.

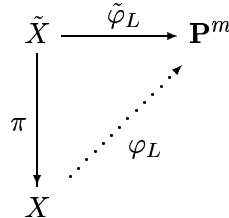
Blow-Up

Sind nun umgekehrt eine projektive Varietät $X \subset \mathbf{P}^n$ und eine Untervarietät $Y \subset X$ gegeben mit $V(\varphi_0, \dots, \varphi_m) = Y$ für gewisse $\varphi_i \in \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]_d$, so heißt der Zariski-Abschluß des Graphen von φ_L in \mathbf{P}^M der *Blow-Up* von X in Y und wird notiert:

$$\tilde{X} := Bl_Y(X) := \overline{\Gamma(\varphi_L)} = \overline{\{(x, \varphi_L(x)) \in (X \setminus Y) \times \mathbf{P}^m\}} \subset \mathbf{P}^M.$$

Man sagt auch, daß man \tilde{X} durch *Aufblasen* von X in Y erhält. Bezeichnen $\tilde{\varphi}_L$ und π die Projektionen, so ist $\pi : \tilde{X} \setminus \pi^{-1}(Y) \xrightarrow{\sim} X \setminus Y$ offenbar ein Isomorphismus. Die Menge $\pi^{-1}(Y)$ heißt *exceptionelle Menge*; für eine Kurve $C \subset X$ notieren wir $\tilde{C} := \pi^{-1}(C)$.

Im folgenden Diagramm wird die Abbildung φ_L durch eine gepunktete Linie dargestellt, da sie ja nur auf $X \setminus Y$ definiert ist. Für $x \in X \setminus Y$ gilt: $\varphi_L(x) = \tilde{\varphi}_L(\pi^{-1}(x))$.



Besteht beispielsweise $Y = \{P\} \subset \mathbf{P}^2$ aus nur einem Punkt P im \mathbf{P}^2 (also dem Schnitt zweier Geraden), so läßt sich Y schreiben als $Y = V(\varphi_0, \varphi_1)$ mit linearen $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathbf{C}[X_0, X_1, X_2]_1$. In diesem Fall ist $\Gamma(\varphi_L) = \{(x, (\varphi_0(x) : \varphi_1(x))) \in (\mathbf{P}^2 \setminus \{P\}) \times \mathbf{P}^1\}$ und $\overline{\Gamma(\varphi_L)} = \Gamma(\varphi_L) \cup \{(P, (y_0 : y_1)) \mid (y_0 : y_1) \in \mathbf{P}^1\}$. Die exceptionelle Menge $\pi^{-1}(Y) = \pi^{-1}(P)$ ist hier demnach ein \mathbf{P}^1 ; im Blow-Up wird P ersetzt durch den \mathbf{P}^1 , der alle Richtungen im Punkt P des \mathbf{P}^2 repräsentiert.

Ist Q ein Punkt auf der exceptionellen Menge $\pi^{-1}(P)$, so sagen wir, daß Q *dem Punkt P unendlich nah* ist (unter π haben beide Punkte ja dasselbe Bild im \mathbf{P}^2). In diesem Fall sagen wir auch, daß eine Kurve $C \subset \mathbf{P}^2$ *die Punkte P und Q enthält*, falls C durch P geht und $\pi^{-1}(C) \setminus \pi^{-1}(P)$ den Punkt Q enthält, das heißt, falls entweder C glatt in P ist mit einer Tangente, die der durch Q definierten Richtung entspricht, oder C singulär in P ist.

Die Linearsysteme $|dH|$

Wir werden es nur mit Linearsystemen der Form $|dH| := |L| = \mathbf{P}(\mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]_d)$ und einigen Abwandlungen zu tun haben. In diesem Fall ist $B_L = \emptyset$ und $\varphi_L := v_d$ die *Veronese-Einbettung*, die definiert ist als

$$v_d : \mathbf{P}^n \hookrightarrow \mathbf{P}^N, N = \binom{n+d}{d} - 1, (x_0, \dots, x_n) \mapsto (M_0(x), \dots, M_N(x)),$$

wobei mit M_0, \dots, M_N alle Monome vom Grad d in $\mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$, etwa in lexikographischer Ordnung, bezeichnet werden.

Ein Beispiel: $v_2 : \mathbf{P}^1 \hookrightarrow \mathbf{P}^2, (x : y) \mapsto (x^2 : xy : y^2)$.

Wir betrachten jetzt Unterräume von L , die aus allen Polynomen aus L bestehen, die in einem Punkt $p \in \mathbf{P}^n$ verschwinden:

$$L - p := \{f \in L \mid f(p) = 0\} \subset L.$$

Induktiv definieren wir dann $L - p_1 - \dots - p_k := \{f \in L \mid f(p_i) = 0 \forall i\} \subset L$ für k Punkte $p_i \in \mathbf{P}^n, i = 1, 2, \dots, k$.

Offenbar gibt es zwei Möglichkeiten, wie $L - p$ aussehen kann. Entweder gilt:

$$\begin{aligned} L = L - p &\Leftrightarrow \forall f \in L : f(p) = 0 \\ &\Leftrightarrow p \in B_L \\ &\Leftrightarrow \text{alle Systemhyperflächen gehen durch } p. \end{aligned}$$

oder aber:

$$\begin{aligned} L \supsetneq L - p &\Leftrightarrow \exists f \in L : f(p) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow p \notin B_L \\ &\Leftrightarrow \exists \text{ Systemfläche } \not\ni p. \end{aligned}$$

Man hat also:

Satz 1.11

$$p \notin B_L \Leftrightarrow \dim|L| = \dim|L - p| + 1.$$

Ähnlich geht man vor, um ein Kriterium dafür zu erhalten, ob φ_L auf $\mathbf{P}^n \setminus B_L$ injektiv ist. Für zwei Punkte $Q, R \in \mathbf{P}^n \setminus B_L$ gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \varphi_L(Q) = \varphi_L(R) &\Leftrightarrow \text{Alle Hyperflächen in } \mathbf{P}^m, \text{ die } \varphi_L(Q) \text{ enthalten,} \\ &\quad \text{enthalten auch } \varphi_L(R). \\ &\Leftrightarrow |L - Q| = |L - R| \\ &\Leftrightarrow |L - Q| = |L - Q - R|. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also mit Satz 1.11:

Satz 1.12

$\varphi_L : \mathbf{P}^n \setminus B_L \longrightarrow \mathbf{P}^m$ ist genau dann injektiv, wenn für alle $Q, R \in \mathbf{P}^n \setminus B_L$ gilt:

$$\dim|L - Q - R| = \dim|L| - 2.$$

Das Linearsystem $|3H|$

Wir betrachten nun das Linearsystem $|3H| = \mathbf{P}(\mathbf{C}[x, y, z]_3)$ auf dem \mathbf{P}^2 näher, da wir es nutzen werden, um kubische Flächen zu erhalten. Offenbar ist $\dim \mathbf{C}[X, Y, Z]_3 = 10$, da das allgemeine homogene Polynom $a_1 X^3 + a_2 X^2 Y + \dots + a_{10} Z^3$ 10 Koeffizienten hat. Dementsprechend ist $\dim|3H| = 9$ und $|3H| \cong \mathbf{P}^9$. Die System-Kurven sind Kubiken im \mathbf{P}^2 . Genauere Auskunft über das Linearsystem liefert der folgende Satz:

Satz 1.13 (Das Linearsystem $|3H|$ auf \mathbf{P}^2)

Seien $P_1, \dots, P_9 \in \mathbf{P}^2$ neun paarweise verschiedene Punkte der projektiven Ebene. Dann gilt:

- a. $\dim|3H| = 9$.
- b. $\dim|3H - P_1| = 8$.
- c. $\dim|3H - P_1 - P_2| = 7$.
- d. $\dim|3H - P_1 - P_2 - P_3| = 6$.
- e. $\dim|3H - P_1 - P_2 - P_3 - P_4| = 5$.
- f. $\dim|3H - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5|$
 $= \begin{cases} 5, & \text{falls alle 5 Punkte auf einer Geraden liegen,} \\ 4, & \text{falls nicht alle 5 Punkte auf einer Geraden liegen.} \end{cases}$
- g. $\dim|3H - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5 - P_6|$
 $= \begin{cases} 5, & \text{falls alle 6 Punkte auf einer Geraden liegen,} \\ 4, & \text{falls genau 5 Punkte auf einer Geraden liegen,} \\ 3, & \text{falls nicht 5 Punkte auf einer Geraden liegen.} \end{cases}$

Angenommen, keine 5 der Punkte liegen auf einer Geraden. Dann hat man außerdem:

- h. $\dim|3H - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5 - P_6 - P_7| = 2$.
- i. $\dim|3H - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5 - P_6 - P_7 - P_8|$
 $= \begin{cases} 2, & \text{falls alle 8 Punkte auf einer Konik liegen,} \\ 1, & \text{falls nicht alle 8 Punkte auf einer Konik liegen.} \end{cases}$
- j. $\dim|3H - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5 - P_6 - P_7 - P_8 - P_9|$
 $= \begin{cases} 2, & \text{falls alle 9 Punkte auf einer Konik liegen,} \\ 1, & \text{falls 8 Punkte auf einer Konik liegen,} \\ 1, & \text{falls die 9 Punkte Schnitt zweier Kubiken sind,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Beweis: a. haben wir schon gesehen. Um die weiteren 9 Aussagen über die Linear-systeme $L_k := |3H - \sum_{i=1}^k P_i|, k = 1, 2, \dots, 9$ zu beweisen, genügt es, jeweils eine Kubik zu konstruieren, die zwar in L_{k-1} , aber nicht in L_k enthalten ist, da sich dann die Dimension jeweils um 1 verringert. Wir suchen also jeweils eine Kubik, die durch die Punkte P_1, \dots, P_{k-1} geht, nicht aber durch P_k .

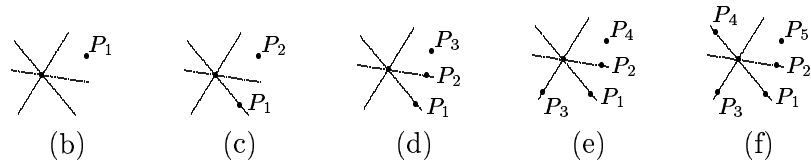


Abbildung 1.18: Kubiken durch P_1, \dots, P_{k-1} , aber nicht durch P_k .

- b. Drei Geraden durch einen Punkt $P \neq P_1$, die P_1 nicht enthalten, sind zusammengenommen eine Kubik, die P_1 nicht enthält (Abb. 1.18 (b)).
- c. Drei Geraden durch P_1 , die P_2 nicht enthalten, sind zusammengenommen eine Kubik, die P_2 nicht enthält (Abb. 1.18 (c)).
- d. Analog (Abb. 1.18 (d)).
- e. Analog (Abb. 1.18 (e)).
- f. Sind P_1, P_2, P_3, P_4 auf einer Geraden l , so enthält (nach Bézout, Satz A.2) jede Kubik durch diese Punkte schon die komplette Gerade. Hätten die Gerade und die Kubik nämlich keine Komponente gemeinsam, bestünde ihre Schnittmenge nur aus 3 Punkten. Also hat das Linearsystem die Gestalt: $|3H - P_1 - P_2 - P_3 - P_4| = l \cdot |2H|$ und es gilt:

$$P_5 \in l \Rightarrow \dim |3H - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5| = \dim |2H| = 5,$$

$$P_5 \notin l \Rightarrow \dim |3H - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5| = \dim |2H - P_5| = 4.$$

Sonst liegen P_1, P_2, P_3, P_4 nicht auf einer Geraden. Jetzt kann man wieder einfach drei Geraden zwischen diesen Punkten wählen, auf denen P_5 nicht liegt, um eine Kubik zu erhalten, die P_5 nicht enthält (Abb. 1.18 (f)).

Die weiteren Fälle bringen keine wesentlichen neuen Ideen und werden daher hier nicht vorgeführt (s. [Har, 1977] oder [GH, 1994]). \square

Ist P_2 unendlich nah P_1 (d.h. P_2 gibt eine Tangenten-Richtung an, in der die Systemkurven durch P_1 gehen; s. Abschnitt 1.3 und [Har, 1977, S. 392] oder [GH, 1994, S. 482] für eine ausführlichere Darstellung), so lassen sich die Beweise ähnlich führen; nur ist eine Gerade durch P_1 und P_2 zu ersetzen durch eine Gerade, die durch P_1 geht und die durch P_2 vorgegebene Tangentenrichtung hat. Unterpunkt i benötigen wir später sogar für den Fall, daß P_3 und P_1 sowie P_7 und P_2 unendlich nah beisammen liegen (s. wieder [Har, 1977] oder [GH, 1994, S. 483]).

Bemerkung 1.14 (Satz vom 9. Punkt) *Der letzte Unterpunkt dieses Satzes ist unter dem Namen Satz vom 9. Punkt bekannt:*

Seien zwei kubischen Kurven im \mathbf{P}^2 gegeneinander und seien deren 9 Schnittpunkte P_1, \dots, P_9 , von denen keine fünf auf einer Geraden und keine 8 auf einer Konik liegen. Geht nun eine weitere Kubik durch die Punkte P_1, \dots, P_8 , so geht sie auch durch P_9 .

Bemerkung 1.15 (Satz von Pascal) *Der Satz vom 9. Punkt wiederum hat einige interessante geometrische Anwendungen. Zum Beispiel folgt aus ihm sofort der Satz von Pascal:*

Seien $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$ sechs verschiedene Punkte auf einer Konik. Bezeichnen wir die Verbindungsgerade zweier Punkte P_i und P_j mit $\overline{P_i P_j}$, so liegen die Schnittpunkte $S_1 := \overline{P_1 P_5} \cap \overline{P_2 P_4}$, $S_2 := \overline{P_1 P_6} \cap \overline{P_3 P_4}$ und $S_3 := \overline{P_2 P_6} \cap \overline{P_3 P_5}$ auf einer Geraden (Abb. 1.19).

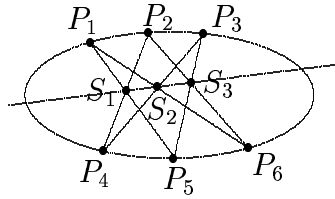


Abbildung 1.19: Satz von Pascal

Beweis: Die beiden Kubiken C_1 und C_2 , bestehend aus den drei Geraden $\overline{P_1 P_5}$, $\overline{P_2 P_6}$ und $\overline{P_3 P_4}$ bzw. $\overline{P_1 P_6}$, $\overline{P_2 P_4}$ und $\overline{P_3 P_5}$, gehen nämlich durch die 9 Punkte $P_1, \dots, P_6, S_1, S_2, S_3$. Die Kubik, die aus der Konik durch P_1, \dots, P_6 und der Geraden durch S_1 und S_2 besteht, muß daher auch durch den 9. Schnittpunkt von C_1 und C_2 , also S_3 gehen. S_3 liegt daher auf der Geraden; dieser Punkt kann nämlich nicht auch noch auf der Konik liegen, da diese sonst mit C_1 und C_2 7 Punkte gemeinsam hätte, was dem Satz von Bézout (A.2) widerspricht. \square

Del Pezzo Flächen

Schauen wir uns nun den Blow-Up des \mathbf{P}^2 in 0, 1, \dots , 6 Punkten genauer in den Fällen an, in denen sich nach Satz 1.13 die Dimension des Linearsystems immer um eins verringert. Wir werden dazu später zwei weitere Punkte P_7 und P_8 benötigen und brauchen verlangen nach Satz 1.13.i, daß von diesen acht Punkten keine fünf auf einer Geraden und nicht alle sechs auf einer Konik liegen. Das können wir dadurch sicherstellen, daß von den ersten sechs Punkten keine drei auf einer Geraden und keine sechs auf einer Konik liegen.

Mit der Vereinbarung $\varphi_i := \varphi_{|3H - \sum_{k=1}^i P_k|}$ ist offenbar $\tilde{\varphi}_0 : \tilde{\mathbf{P}}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^9$ injektiv, da nach Satz 1.13 und Satz 1.12 φ_0 injektiv und $\overline{\Gamma(\varphi_0)} = \Gamma(\varphi_0)$ ist. Da das Bild der

Geraden $\pi^{-1}(P_1)$, $\tilde{\varphi}_1(\pi^{-1}(P_1))$, eine Gerade im \mathbf{P}^3 darstellt (Lemma 1.16), die disjunkt mit dem Bild von φ_0 ist, ist auch $\tilde{\varphi}_1$ injektiv.

Analog geht man in den Fällen $\varphi_i, i = 2, 3, \dots, 6$ vor; es ist dann jeweils nur noch zu zeigen, daß sich zwei der E_i nicht schneiden. Das Lemma 1.17 liefert den Beweis für den Fall von 6 Punkten, den wir später für kubische Flächen verwenden werden; die anderen Fälle können aber völlig analog nachgewiesen werden.

Lemma 1.16 *Für $j \in \{1, 2, \dots, 6\}$ ist $E_i := \tilde{\varphi}_j(\pi^{-1}(P_i)) \subset \mathbf{P}^3$ eine Gerade für alle $i \leq j$.*

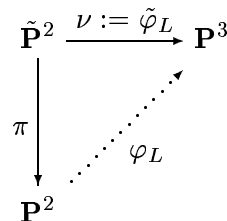
Beweis: Wir betrachten hier nur den uns hauptsächlich interessierenden Fall $j = 6$. Die Systemkurven sind also Kubiken durch die 6 Punkte. Da für jedes $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ jeder Punkt von E_i einer Richtung im Punkt $P_i \in \mathbf{P}^2$ entspricht, schneidet die einer glatten Systemkurve zugehörige Hyperebene im \mathbf{P}^3 E_i in genau einem Punkt. Daher muß E_i eine Gerade sein. \square

Lemma 1.17 *Sind die 6 Punkte P_1, \dots, P_6 des \mathbf{P}^2 in allgemeiner Lage (keine drei auf einer Geraden und keine 6 auf einer Konik), so sind die ihnen entsprechenden Geraden $E_i := \tilde{\varphi}_6(P_i), i = 1, 2, \dots, 6$, disjunkt.*

Beweis: Nehmen wir an, daß sich E_i und E_j für gewisse $i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}, i \neq j$ schneiden. Jede Hyperebene, die durch diesen Punkt geht, entspricht dann in der Ebene einer Systemkurve (einer Kubik durch die 6 Punkte), die in den Punkten P_i und P_j jeweils eine ganz bestimmte Tangentensteigung hat. Finden wir also zwei Kubiken durch die sechs Punkte, die in P_i zwar eine vorgegebene Richtung haben, in P_j aber verschiedene Richtungen haben, haben wir gezeigt, daß dieser Fall nicht eintreten kann.

Wie wir aber bereits im Anschluß an Satz 1.13 bemerkt haben, ist die Dimension des Linearsystems $|3H - P_1 - \dots - P_6| \geq 1$, auch wenn zweimal jeweils zwei der Punkte unendlich nah beisammen liegen, wenn also in zwei der sechs Punkte eine beliebige Richtung vorgegeben wird. \square

Der Blow-Up $\tilde{\mathbf{P}}^2$ des \mathbf{P}^2 in den $r = 0, 1, \dots, 6$ Punkten allgemeiner Lage läßt sich also in den \mathbf{P}^{9-r} einbetten. Diese Flächen vom Grad $9 - r$ im \mathbf{P}^{9-r} sind glatt und heißen *del Pezzo Flächen* (s. Theorem 24.5., S. 121, in [Man, 1974] oder Korollar V.4.7. in [Har, 1977]). Für kubische Flächen erhält man folgendes Diagramm:



Um den Grad dieser Fläche im \mathbf{P}^3 zu ermitteln, können wir nach Bézout (A.3) diese mit einer Geraden (also dem Schnitt zweier Hyperebenen) schneiden und die

Anzahl der Schnittpunkte zählen. Da das Urbild einer Hyperebene wegen der Wahl des Basissystems eine kubische Kurve durch die 6 Punkte des \mathbf{P}^2 ist und sich zwei solche Kurven in $3 \cdot 3 - 6 = 3$ Punkten außerhalb des Basis-Lokus $B_{|3H - \sum_{i=1}^6 P_i|} = \{P_1, \dots, P_6\}$ schneiden, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \deg(X) &= \#(\nu(\pi^{-1}(\mathbf{P}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_6\})) \cap H_1 \cap H_2) \\ &= \#(\mathbf{P}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_6\} \cap \pi(\nu^{-1}(H_1)) \cap \pi(\nu^{-1}(H_2))) \\ &= 3 \cdot 3 - 6 = 3. \end{aligned}$$

Letztendlich haben wir also gezeigt:

Satz 1.18 (Kubische Flächen als in sechs Punkten aufgeblasener \mathbf{P}^2)

Sei L das Linearsystem aller ebenen Kubiken durch 6 Punkte $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden und nicht alle sechs auf einer gemeinsamen Konik liegen, und sei $(\varphi_0, \dots, \varphi_3) \in \mathbf{C}[X_0, \dots, X_3]_3^3$ eine Basis von L . Dann läßt sich der Blow-Up $\tilde{\mathbf{P}}^2 := Bl_{\{P_1, \dots, P_6\}}(\mathbf{P}^2)$ des \mathbf{P}^2 in diesen sechs Punkten vermöge $\tilde{\varphi}_L : \tilde{\mathbf{P}}^2 \hookrightarrow \mathbf{P}^3$ in den \mathbf{P}^3 einbetten und liefert eine kubische Fläche im \mathbf{P}^3 .

In [GH, 1994, S. 480-489] wird gezeigt, daß die so erhaltenen kubischen Flächen glatt sind und sogar umgekehrt gilt (auch Clebsch sagt dies schon in [Cle, 1866]):

Satz 1.19

Jede glatte kubische Fläche $S \subset \mathbf{P}^3$ kann man durch Aufblasen des \mathbf{P}^2 in sechs Punkten $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden und nicht alle sechs auf einer gemeinsamen Konik liegen, erhalten, indem man den Blow-Up vermöge des Linearsystems der Kubiken durch die 6 Punkte in den \mathbf{P}^3 einbettet.

Wir interessieren uns hier nur für kubische Flächen mit reellen Koeffizienten:

Korrolar 1.20

Da kubische Flächen mit reellen Koeffizienten unter komplexer Konjugation fix sind, können wir alle solchen Flächen durch Aufblasen des \mathbf{P}^2 in sechs Punkten erhalten, von denen je zwei zueinander komplex konjugiert sind.

Sind die 6 Punkte nicht in allgemeiner Lage (liegen also drei auf einer Geraden oder alle sechs auf einer Konik), so ist $\tilde{\varphi}_L : \tilde{\mathbf{P}}^2 \rightarrow \mathbf{P}^3$ nicht notwendigerweise injektiv und wir können den Blow-Up des \mathbf{P}^2 in diesen Punkten nicht mehr als Teilmenge des \mathbf{P}^3 auffassen. Diesen Fall werden wir im letzten Kapitel (S. 74) betrachten; das Bild dieser Abbildung im \mathbf{P}^3 ist nämlich immer noch eine kubische Fläche, hat allerdings Singularitäten.

Die 27 Geraden

In Satz 2.4 auf Seite 34 wird gezeigt, daß auf einer glatten kubischen Fläche genau 27 Geraden liegen. Diese können mit der hier vorgestellten Theorie sehr einfach angegeben werden:

Satz 1.21 (Die 27 Geraden)

Auf jeder glatten kubischen Fläche gibt es 27 Geraden. Bezeichnen wir mit $Q_i \subset \mathbf{P}^2$, $i = 1, 2, \dots, 6$ die Konik durch die 5 Punkte $\{P_1, \dots, P_6\} \setminus \{P_i\}$ und mit $l_{ij} \subset \mathbf{P}^2$ die Gerade durch die beiden Punkte P_i und P_j , $i, j = 1, 2, \dots, 6$, $i \neq j$, so sind dies:

- $E_i := a_i := \nu(\pi^{-1}(P_i)) \subset \mathbf{P}^3$, $i = 1, 2, \dots, 6$, (6 Geraden)
- $C_i := b_i := \nu(\tilde{Q}_i) \subset \mathbf{P}^3$, $i = 1, 2, \dots, 6$, (6 Geraden)
- $L_{ij} := c_{ij} := \nu(\tilde{l}_{ij}) \subset \mathbf{P}^3$, $i, j = 1, 2, \dots, 6$, $i \neq j$. (15 Geraden)

Beweis: Es ist nur noch zu zeigen, daß die aufgeführten Kurven wirklich Geraden sind. Hierzu verwenden wir sowohl den Satz von Bézout für Kurven im \mathbf{P}^2 (A.2) als auch dessen Version im \mathbf{P}^3 (A.3).

E_i : Das haben wir schon in 1.16 gesehen.

C_i : Der Grad der Kurve C_i ist:

$$\begin{aligned} \deg(C_i) &= \#(\nu(\pi^{-1}(Q_i)) \cap H) \\ &= \#(Q_i \cap \nu^{-1}(H) \cap (\mathbf{P}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_6\})) \\ &= 3 \cdot 2 - 5 = 1, \end{aligned}$$

da Q_i durch genau 5 der 6 Punkte geht.

L_{ij} : Der Grad der Kurve L_{ij} ist:

$$\begin{aligned} \deg(L_{ij}) &= \#(\nu(\pi^{-1}(l_{ij})) \cap H) \\ &= \#(l_{ij} \cap \nu^{-1}(H) \cap (\mathbf{P}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_6\})) \\ &= 3 \cdot 1 - 2 = 1, \end{aligned}$$

da l_{ij} durch genau 2 der 6 Punkte geht.

□

Beachtet man, daß die exzeptionellen Geraden E_i genau aus den Richtungen in dem jeweiligen Punkt in der Ebene bestehen, findet man schnell die Schnitt-Eigenschaften der 27 Geraden.

Satz 1.22 (Konfiguration der 27 Geraden)

Für die 27 Geraden, wie sie in 1.21 gegeben wurden, gilt:

- $a_i \cap a_j = \emptyset \forall i, j = 1, 2, \dots, 6, i \neq j.$
- $b_i \cap b_j = \emptyset \forall i, j = 1, 2, \dots, 6, i \neq j.$
- $a_i \cap b_i = \emptyset \forall i = 1, 2, \dots, 6.$
- $a_i \cap b_j = \text{ein Punkt}, \forall i, j = 1, 2, \dots, 6, i \neq j.$
- $c_{ij} \cap c_{ik} = \emptyset$ für paarweise verschiedene $i, j, k = 1, 2, \dots, 6.$
- $c_{ij} \cap c_{kl} = \text{ein Punkt},$ für paarweise verschiedene $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, 6\}.$

Beweis: Das gesamte nächste Kapitel handelt von dieser Geraden-Konfiguration (s. insbesondere Abschnitt 2.2.2 ab Seite 36); wir führen den Beweis daher hier nicht durch. \square

Kapitel 2

Die 27 Geraden auf einer kubischen Fläche

Hendersons Buch [Hen, 1911] über die 27 Geraden auf einer kubischen Fläche ist eine nahezu unerschöpfliche Quelle von Informationen über dieses Thema. In Anlehnung an dieses Buch werden wir in diesem Kapitel zunächst die Eigenschaften kubischer Flächen herausarbeiten, die nötig sind, um erstens die Existenz und Anzahl der Geraden und zweitens die Inzidenzrelationen zwischen den 27 Geraden zu verstehen.

Schläflis Doppel-Sechs-Notation, die dabei vorgestellt wird, werden wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit meist verwenden, um die Geraden zu bezeichnen. Durch die hier gewählte Herangehensweise werden wir außerdem das ebenfalls für den Rest der Arbeit wichtige Verständnis für die Verhältnisse zwischen den 27 Geraden und den 45 Tritangentialebenen aufbauen.

Den Abschluß dieses Kapitels bildet ein Abschnitt über die Automorphismengruppe der 27 Geraden. Diese ist zwar implizit schon durch die Doppel-Sechs-Notation gegeben; die abstrakte Betrachtung der Gruppe bringt allerdings noch weitere Eigenschaften zu Tage, wie zum Beispiel die Erkenntnis, daß das Problem, für eine allgemeine kubische Fläche, die nicht in einer besonderen Form gegeben ist, die 27 Geraden zu bestimmen, nicht durch Radikale lösbar ist.

2.1 Die 27 Geraden auf einer kubischen Fläche

Es gibt viele Möglichkeiten nachzuweisen, daß auf einer glatten kubischen Fläche 27 Geraden liegen. Weiß man beispielsweise, daß man bis auf Isomorphismus jede glatte kubische Fläche als Blowup des \mathbf{P}^2 in 6 Punkten allgemeiner Lage erhalten kann (Satz 1.19), so liegen darauf laut Satz 1.21 mindestens 27 Geraden; daß es auch nicht mehr sind zeigt dies allerdings noch nicht.

Clebsch stellt in [Cle, 1861c] vor, die auf einen Schlag die 27 Geraden liefert und auch zeigt, daß es nicht mehr geben kann. Er gibt dort eine Kovariante $(11n-24)$ ter Ordnung an, deren Schnitt mit einer Fläche vom Grad n aus den Punkten besteht, in denen eine vierpunktige Berührung einer Tangenten möglich ist: $F = \Theta - 4\Delta T = 0$, wobei Θ , Δ und T gewisse Determinanten sind. Im Fall kubischer Flächen erhält man so eine Kurve vom Grad $(11 \cdot 3 - 24) \cdot 3 = 27$. Da auf kubischen Flächen aber nach Bézout (A.3) eine vierpunktige Berührung einer Tangenten in einem Punkt nur möglich ist, wenn diese Tangente komplett in der Fläche enthalten ist, besteht die ganze Kurve vom Grad 27 aus 27 Geraden — und es gibt auch nicht mehr Geraden auf der Fläche.

Obwohl dies auf einen Schlag die Existenz aller 27 Geraden liefert, wählen wir hier, wie auch Henderson, die sehr anschauliche Vorgehensweise Salmons, da dadurch einiges zum Verständnis kubischer Flächen beigetragen wird. Von einer Geraden L auf einer kubischen Fläche $\{f = 0\}$ ausgehend, zählen wir alle Geraden auf der Fläche. Hierzu zeigen wir, daß durch L genau 5 Tritangentialebenen gehen; die Summe von 27 Geraden wird sich dann durch einfaches Nachzählen ergeben.

Lemma 2.1 *Auf einer kubischen Fläche liegt mindestens eine Gerade.*

Beweis: Ein in der Literatur normalerweise benutztes Dimensionsargument (s. z.B. Hendersohn [Hen, 1911], §1) ähnlich dem bei Lemma 2.6, S. 35 angeführten, ist leider kein korrekter Beweis. Wir wollen uns mit dem Hinweis auf Satz 1.21 und die eben erwähnte Kovariante neunten Grades begnügen. Auch Miles Reid führt in [Rei, 1988] einen sehr elementaren Beweis der Existenz einer Geraden vor; wegen seiner Länge und da er keine neuen Einblicke gewährt, werden wir aber auch diesen hier nicht vorführen. \square

Lemma 2.2 *Durch eine Gerade L auf einer kubischen Fläche $\{f = 0\}$ gehen genau 5 Tritangentialebenen. Ist die Fläche glatt, so sind diese alle verschieden.*

Beweis: Um die Tritangentialebenen durch L zu zählen, wählen wir die Koordinaten so, daß die Gerade geschrieben werden kann als $L = \{x_3 = x_4 = 0\}$, mit homogenen Koordinaten $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ des \mathbf{P}^3 . Dann kann $f = 0$ geschrieben werden als $x_3U + x_4V = 0$ mit Quadriken U und V . Da eine Ebene durch L durch die Gleichung $x_3 = \mu x_4$ beschrieben wird, setzen wir dies in die obige Gleichung ein, dividieren durch x_4 und erhalten: $g := \mu U + V$. Da

$$\begin{aligned} U &= \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} \\ &= \sum_{|\alpha|=2} \mu^{\alpha_3} a_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_4^{\alpha_3+\alpha_4} \end{aligned}$$

und Entsprechendes für V gilt, haben wir schließlich:

$$g = \sum_{|\alpha|=2} \mu^{\alpha_3} (\mu a_\alpha + b_\alpha) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_4^{\alpha_3+\alpha_4}.$$

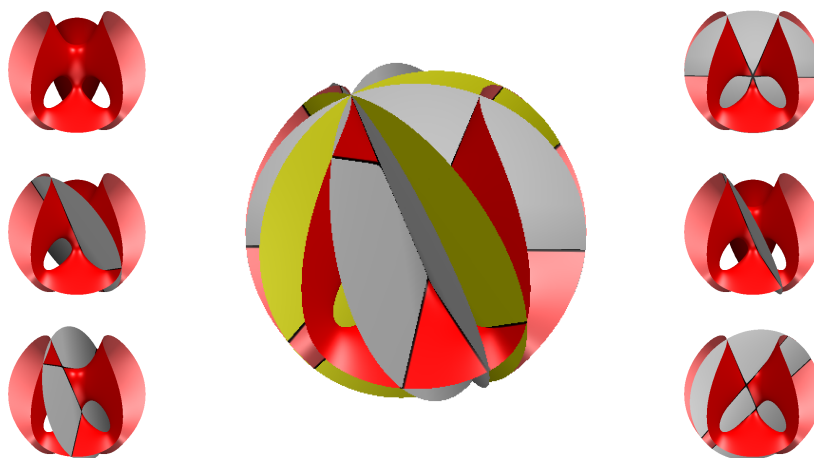


Tabelle 2.1: Die fünf Tritangentialebenen durch eine Gerade.

Eine Quadrik $aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2dXZ + 2eYZ + fZ^2$ zerfällt aber genau dann in zwei Geraden, wenn die entsprechende Bilinearform degeneriert (s. [Rei, 1988, S. 14]), wenn also

$$\det \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} = 0.$$

In unserem Fall sind a , b und c lineare Funktionen in μ , d und e quadratische und f eine kubische. Dies liefert eine Gleichung vom Grad 5 in μ . Es gibt also 5 Werte für μ , für die die Ebene $x_3 = \mu x_4$ eine Tritangentialebene ist. Anders ausgedrückt gehen durch eine gegebene Gerade auf einer kubischen Fläche genau 5 Tritangentialebenen, wenn man mit entsprechenden Multiplizitäten zählt. Miles Reid zeigt in [Rei, 1988, S. 107], daß diese fünf Ebenen im glatten Fall alle verschieden sind (s. auch [Kle, 1873, §9]). \square

Zum Beweis des anschließenden Satzes benötigen wir noch das folgende Lemma:

Lemma 2.3 *Treffen sich auf einer glatten kubischen Fläche zwei oder mehr Geraden in einem Punkt, so liegen alle diese Geraden in einer gemeinsamen Tritangentialebene (daher gehen also maximal drei Geraden durch einen Punkt).*

Beweis: Durch einen Punkt P einer glatten kubischen Fläche geht eine eindeutige Tangentialebene. Eine Gerade durch P muß nun aber auch in dieser tangierenden Ebene liegen. Daher liegen alle Geraden durch P in einer gemeinsamen Ebene. \square

Dieses Lemma macht klar, daß es etwas Besonderes ist, wenn sich drei Geraden in einem gemeinsamen Punkt auf einer kubischen Fläche treffen, wenn die Fläche also einen Eckardt-Punkt hat (s. Definition 1.6). Es gibt übrigens maximal 10

solcher Eckardt-Punkte auf einer glatten kubischen Fläche; eine Fläche mit dieser Eigenschaft ist die Diagonalfäche von Clebsch (s. Abschnitt 4.4.1 auf S. 94).

Jetzt haben wir genügend Fakten gesammelt, um die zentrale Aussage dieses Kapitels zu beweisen:

Satz 2.4 (27 Geraden)

Auf einer glatten kubischen Fläche $f = 0$ liegen genau 27 Geraden.

Beweis: Da auf einer kubischen Fläche mindestens eine Gerade L liegt (Lemma 2.1), können wir das eben bewiesene Lemma 2.2 benutzen. Es gibt also 5 Tritangentialebenen durch L und somit auch 5 Dreiecke, die L als Kante enthalten. Dasselbe Argument läßt sich auf jede Gerade anwenden. Fixieren wir nun eine Tritangentialebene E , so trifft E also genau $4 \cdot 3 = 12$ andere Tritangentialebenen in einer ihrer drei Geraden, und jede dieser enthält wiederum zwei weitere Geraden. Neben den 3 Geraden auf E gibt es also $2 \cdot 12$ Geraden; diese sind alle verschieden, da sich sonst auf E drei Geraden in einem Punkt treffen würden, die nicht in einer Ebene liegen - was wegen Lemma 2.3 nicht möglich ist. Somit liegen insgesamt somit 27 Geraden auf der Fläche.

Um einzusehen, daß es auch nicht mehr als diese 27 Geraden gibt, sei g eine beliebige Gerade auf f , die nicht in E enthalten ist. g schneidet E in einem Punkt - und zwar in einem Punkt, der auf einer Geraden e liegt, die E aus der Fläche f schneidet, da $E \cap f$ nur genau aus drei Geraden besteht. Die Ebene, die von g und e aufgespannt wird, ist aber schon eine der eben betrachteten Tritangentialebenen. Wir haben g also eben schon mitgezählt. \square

Ähnlich sieht man ein, daß eine Gerade L von genau $5 \cdot 2$ anderen getroffen wird, 2 pro Tritangentialebene durch L . Gäbe es nämlich noch eine weitere Gerade g , die L schneidet, so wäre die Ebene, die von L und g aufgespannt wird, ebenfalls eine Tritangentialebene (da auf ihr ja schon zwei Geraden liegen, also sogar drei), was nicht möglich ist.

Wenn sich alle 27 Geraden paarweise schneiden würden, gäbe es $\binom{27}{2} = 351$ Schnittpunkte. Da aber jede Gerade nur von 10 anderen getroffen wird, verbleiben 16 Geraden, die sie nicht schneiden. Es gibt also $\frac{27 \cdot 16}{2} = 216$ Geradenpaare, die sich gegenseitig nicht schneiden, so daß man insgesamt auf 135 Schnittpunkte kommt. Auch hierzu hat Clebsch in einer seiner Arbeiten eine Fläche angegeben, deren Schnitt mit der Menge der 27 Geraden genau aus diesen 135 Schnittpunkten besteht: [Cle, 1864].

Jeweils drei dieser Schnittpunkte definieren eine Tritangentialebene E (s. Abbildung 2.1). Nach Lemma 2.3 müßte eine weitere Gerade durch einen der Dreieckspunkte nämlich ebenfalls in der Ebene des Dreiecks liegen, was, wiederum nach Bézout, nicht möglich ist. Man hat also:

Satz 2.5 (Existenz der 45 Tritangentialebenen)

Es gibt 45 Tritangentialebenen. \square

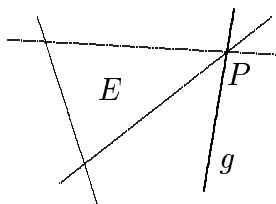


Abbildung 2.1: Durch den Eckpunkt eines Dreiecks geht keine weitere Gerade.

2.2 Notationen

2.2.1 Salmons Notation der 27 Geraden

Lemma 2.6 *Die Gleichung einer glatten kubischen Fläche kann auf die kanonische Form $uvw - \xi\eta\zeta = 0$ gebracht werden, wobei $u, v, w, \xi, \eta, \zeta$ lineare homogene Polynome in den Variablen X_1, \dots, X_4 sind.*

Beweis: Wie schon zuvor angedeutet, geben wir hier keinen echten Beweis; das folgende Dimensionsargument soll genügen. Die allgemeine Gleichung der kubischen Fläche hat 19 unabhängige Konstanten. Da die linearen Polynome $u, v, w, \xi, \eta, \zeta$ genau $3 \cdot 6 = 18$ unabhängige Konstanten beinhalten und implizit eine Konstante in einem der Faktoren uvw bzw. $\xi\eta\zeta$ enthalten ist, enthält die Form $uvw - \xi\eta\zeta = 0$ ebenfalls 19 Konstanten. Daher kann die allgemeine Gleichung der kubischen Fläche so dargestellt werden. \square

Hendersohn stellt in ([Hen, 1911], §15) auf sehr anschauliche Weise dar, daß das Problem der Reduktion einer Kubik auf die obige Form auf 120 Arten möglich ist. Wir werden diese kanonische Form hier allerdings nur nutzen, um eine mögliche Notation der 27 Geraden zu erläutern.

Betrachten wir hierzu also eine kubischen Fläche $ace - bdf = 0$, wobei a, b, c, d, e, f lineare homogene Polynome sind. Bezeichnen wir die Schnittgerade der Ebenen $a = 0$ und $b = 0$ mit ab etc., so sehen wir, daß die Fläche die neun Geraden $ab, ad, af, cb, cd, cf, eb, ed, ef$ enthält.

Sei $a = \mu b$ nun die Gleichung einer Tritangentialebene durch die Schnittgerade der Flächen a und b (jede solche, die verschieden von a ist, läßt sich so schreiben). Setzen wir diese in die Gleichung der Fläche ein, so erhalten wir $\mu bce - bdf = 0$ und sehen, daß die Ebene $a = \mu b$ die Fläche in den gleichen beiden weiteren Geraden trifft wie den Hyperboloid $\mu ce - df = 0$. Eine Ebene kann aus einem Hyperboloid aber nur zwei Geraden ausschneiden, die zu unterschiedlichen Geradenfamilien gehören (s. Abb. 2.2, [Sal, 1879, §§108-114], sehr anschaulich ist [HCV, 1932, §§2,3]): Auf einem Hyperboloid liegen zwei Familien aus jeweils unendlich vielen Geraden, von denen jede genau alle Geraden der anderen Familie schneidet. Eine der beiden

Geraden auf der Ebene $a = \mu b$ trifft also die zwei Geraden cd und ef aus dem einen Bündel, die andere cf und ed aus dem anderen Bündel.

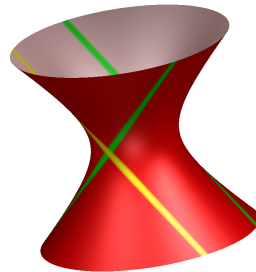


Abbildung 2.2: Die Geraden cd , ef (grün) und cf , ed (gelb) auf dem Hyperboloid $\mu ce - df = 0$.

Die restlichen 18 Geraden können wir dementsprechend nach den Geraden, die sie schneiden, bezeichnen: diejenige Gerade, die ab , cd und ef trifft, notieren wir $ab.cd.ef$. Da μ in den obigen Ausführungen drei Werte annehmen kann, gibt es drei Geraden, die ab , cd und ef schneiden. Letztendlich können wir die 27 Geraden also, wenn wir diese Argumentationen auf die anderen Ebenen übertragen, folgendermaßen notieren:

Notation 2.7 *In Salmon's Notation bezeichnen*

$$ab, ad, \dots, ef$$

die ersten neun Geraden und

$$\begin{aligned} &(ab.cd.ef)_i, \quad (ad.cf.eb)_i, \quad (af.cb.ed)_i, \\ &(ab.cf.ed)_i, \quad (ad.cb.ef)_i, \quad (af.cd.eb)_i, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3$, die weiteren 18.

2.2.2 Schläflis Doppel-Sechs-Notation

Salmons Notation war die erste, die für die 27 Geraden gegeben wurde, allerdings nicht die praktikabelste. Schon 1858 entdeckte Schläfli die von ihm so genannte Doppel-Sechs-Konfiguration ([Sch, 1858]). Die darauf basierende Notation hat den großen Vorteil, daß man die Inzidenzen zwischen den einzelnen Geraden sofort ablesen kann und daß die Notation von einer einmal gewählten Doppel-Sechs eindeutig abzuleiten ist.

Betrachten wir die folgenden, in Salmons Notation geschriebenen, $2 \cdot 6$ Geraden:

$$\begin{aligned} \mathbf{ab}, \quad cd, \quad ef, \quad (ad.cf.eb)_1, \quad (ad.cf.eb)_2, \quad (ad.cf.eb)_3, \\ cf, \quad \mathbf{eb}, \quad \mathbf{ad}, \quad (\mathbf{ab.cd.ef})_1, \quad (\mathbf{ab.cd.ef})_2, \quad (\mathbf{ab.cd.ef})_3. \end{aligned}$$

In diesem Schema schneiden sich weder Geraden der ersten noch der zweiten Zeile untereinander, wie man sich leicht anhand der Konstruktion der Geraden $(ab.cd.ef)_i$ überlegen kann. Außerdem schneiden sich zwar zwei übereinander stehende Geraden nicht, ansonsten schneidet eine Gerade aber alle in der jeweils anderen Zeile stehenden Geraden. Zur Verdeutlichung der Inzidenzen sind im obigen Schema die Geraden hervorgehoben, die die Gerade ab treffen.

Notation 2.8 *Ein System von $2 \cdot 6$ Geraden*

$$\begin{array}{cccccc} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5, & b_6, \end{array}$$

heißt *Doppel-Sechs*, falls es die eben beschriebenen und in Tabelle 2.2 dargestellten Inzidenzen aufweist.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
b_1	
b_2
b_3
b_4
b_5
b_6	

Tabelle 2.2: Inzidenzschema einer Doppelsechs

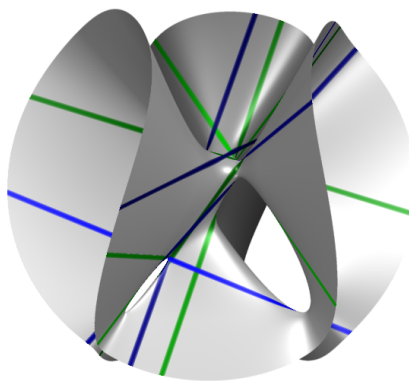


Abbildung 2.3: Eine Doppel-Sechs auf einer kubischen Fläche

Ausgehend von einer solchen Doppel-Sechs auf einer kubischen Fläche, dargestellt in der Abbildung 2.3, ist es nun möglich, die komplexe Symmetrie aller 27 Geraden in einer eindeutigen und einfachen Form darzustellen.

Kehren wir aber kurz nochmals zur in Salmon's Notation geschriebenen Doppel-Sechs zurück, sehen wir, daß die Geraden ab , cb und eb alle in der selben Ebene, nämlich b liegen; und dies sind die einzigen Geraden, die in dieser Ebene liegen. Entsprechendes gilt für cb , cd und cf , die alle in der Ebene c liegen. Daher muß also die Gerade, die in der selben Ebene wie ab und eb liegt, identisch sein mit jener, die in der selben Ebene wie cd und cf liegt, eben die Gerade cb .

In der neuen Notation werden wir die dritte Gerade in der Ebene, die von a_1 und b_2 aufgespannt wird, c_{12} und das Dreieck, das diese drei Geraden bilden, Δ_{12} notieren. Das Dreieck, das c_{12} mit a_2 und b_1 bildet, bezeichnen wir entsprechend mit Δ_{21} .

Wir haben also $\binom{6}{2} = 15$ Geraden c_{ij} , von denen jede von den 12 Geraden a_k, b_l nur genau die vier Geraden a_i, b_j, a_j, b_i schneidet. Würde nämlich c_{12} eine andere der

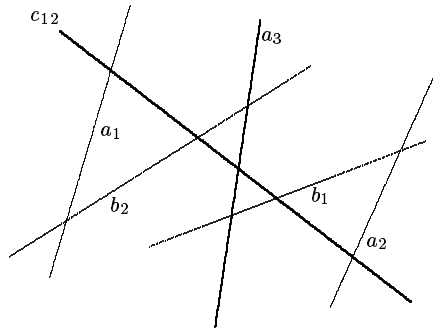


Abbildung 2.4: a_3 trifft nicht c_{12}

acht Geraden $a_3, a_4, a_5, a_6, b_3, b_4, b_5, b_6$, beispielsweise a_3 , schneiden (s. Abb. 2.4), so würden (da a_3 nach Voraussetzung b_1 und b_2 schneidet) a_3, b_1 und c_{12} sowie a_3, b_2 und c_{12} in jeweils einer Ebene liegen. Diese beiden Ebenen hätten aber die beiden Geraden c_{12} und a_3 gemeinsam, wären also identisch; demnach müßten sich b_1 und b_2 schneiden, was aber nach Voraussetzung über die Inzidenzen innerhalb einer Doppel-Sechs-Konfiguration nicht der Fall ist.

Betrachten wir nun Schnitte der c_{ij} untereinander, so sehen wir, daß sich zwei c_{ij} , die einen Index gemeinsam haben, nicht schneiden. Nehmen wir nämlich beispielsweise an, daß sich c_{12} und c_{13} schneiden. Dann spannen diese beiden Geraden eine Ebene auf, in der a_1 und b_1 liegen; a_1 und b_1 müßten sich also schneiden, was den Eigenschaften der Doppel-Sechs widerspricht.

Da durch eine Gerade c_{ij} aber, wie in Lemma 2.2 gezeigt wurde, fünf Tritangentialebenen gehen, muß diese Gerade noch von sechs anderen Geraden geschnitten werden. Da die meisten bereits ausgeschlossen wurden, bleiben nur noch genau die sechs Geraden $c_{kl}, k, l \neq i, j$ übrig. Diese bilden also in Zweier-Paaren die restlichen drei Tritangentialebenen durch c_{ij} . Zusammenfassend ergeben sich also folgende Inzidenzen:

Eigenschaften 2.9 Für paarweise verschiedene $i, j, k, l = 1, 2, \dots, 6$, gilt:

- c_{ij} schneidet a_i, b_j und a_j, b_i ,
- $c_{ij} = c_{ji}$,
- c_{ij} schneidet c_{kl} ,
- c_{ij} schneidet nicht c_{ik} ,
- Das Dreieck Δ_{ij} ist nicht identisch mit Δ_{ji} .

Das komplette Inzidenzschema ist in Tabelle 2.3 auf Seite 40 dargestellt.

Hieraus sieht man sofort, daß es $2 \cdot \binom{6}{2} = 30$ Dreiecke der Form Δ_{12} und $5 \cdot 3 = 15$ Dreiecke der Form c_{12}, c_{34}, c_{56} , kurz 12.34.56 geschrieben, gibt. Letzteres sieht man ein, wenn man bedenkt, daß es zu einer Geraden c_{1i} genau $\frac{1}{2} \binom{4}{2} = 3$ Möglichkeiten gibt, diese zu einem Dreieck der zweiten Form zu ergänzen.

Vergessen wir nun für kurze Zeit, daß die $2 \cdot 6$ Geraden der Doppel-Sechs auf einer kubischen Fläche liegen und betrachten wir sie nur als Geraden im \mathbf{P}^3 mit einer bestimmten Schnitt-Konfiguration. Es gilt der folgende interessante Satz ([Sch, 1858, S. 214 der Gesammelten Abhandlungen]):

Satz 2.10 (Das Doppel-Sechs-Theorem)

Seien a, b, c, d, e fünf Geraden, die die selbe Gerade X treffen; dann können je vier der fünf Geraden geschnitten werden von einer anderen Geraden. Seien A, B, C, D bzw. E die anderen Geraden, die (b, c, d, e) , (c, d, e, a) , (d, e, a, b) , (e, a, b, c) bzw. (a, b, c, d) treffen. Dann werden A, B, C, D und E alle von einer anderen Geraden x getroffen, so daß man die folgende Doppel-Sechs-Konfiguration erhält:

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ A & B & C & D & E & F. \end{array}$$

An der zitierten Stelle fragt Schläfli den Leser, ob für dieses Theorem ein Beweis existiere, der unabhängig von der Theorie der kubischen Flächen sei, da er selbst keinen solchen kannte. Und tatsächlich dauerte es lange, bis elementare Beweise gefunden wurden (für Referenzen und einen Beweis s. [Hen, 1911, S. 14 ff]).

Hilbert und Cohn-Vossen betrachten die Doppel-Sechs in [HCV, 1932, §25] im Rahmen der Ausführungen über Konfigurationen. Sie stellen dort eine besonders übersichtliche Konstruktion einer Doppel-Sechs vor, bei der auf jeder Seitenfläche eines Würfels sowohl eine Gerade a_i als auch eine Gerade b_j verlaufen. In der Abbildung 2.5 ist die komplette Konfiguration dargestellt - Geraden a_i grün, Geraden b_j rot gefärbt; Schnitte zwischen Geraden sind durch kleine Kreise hervorgehoben. Auf der Internet-Seite [vSL, 2000] ist diese Konstruktion mit einem interaktiven Geometrie-Programm umgesetzt worden, so daß man dort die Geraden auf den Würfelseiten verschieben und die Konfiguration noch besser verstehen kann:

<http://enriques.mathematik.uni-mainz.de/csh/mathback/doublesix.html>.

	1	2	3	4	5	6	1'	2'	3'	4'	5'	6'	12	13	14	15	16	23	24	25	26	34	35	36	45	46	56
1								•	•	•	•	•	•	•	•	•	•										
2							•		•	•	•	•	•					•	•	•	•						
3							•	•		•	•	•		•				•				•	•	•			
4							•	•	•		•	•			•				•				•			•	•
5							•	•	•	•		•				•					•			•		•	•
6							•	•	•	•	•						•					•			•		•
1'		•	•	•	•	•							•	•	•	•	•										
2'	•			•	•	•								•					•	•	•	•					
3'	•	•		•	•	•								•					•				•	•	•		
4'	•	•	•		•	•									•				•				•			•	•
5'	•	•	•	•		•										•					•			•		•	•
6'	•	•	•	•	•												•					•			•		•
12	•	•					•	•															•	•	•	•	•
13	•		•				•		•											•	•	•				•	•
14	•			•			•			•									•		•	•		•	•		•
15	•				•		•				•								•	•		•	•		•		•
16	•					•	•					•							•	•	•		•	•		•	
23		•	•					•	•																	•	•
24		•		•				•		•					•		•	•						•	•		•
25		•			•			•			•				•	•		•					•		•		•
26		•				•		•				•			•	•	•						•	•		•	
34			•	•						•	•			•		•	•				•	•					•
35			•		•					•		•		•		•				•		•					•
36			•			•				•		•		•	•					•	•					•	
45				•	•					•	•			•	•					•		•			•		
46				•		•				•		•		•	•					•		•			•		
56					•	•					•	•		•	•	•					•	•					

Tabelle 2.3: Inzidenzschema der 27 Geraden

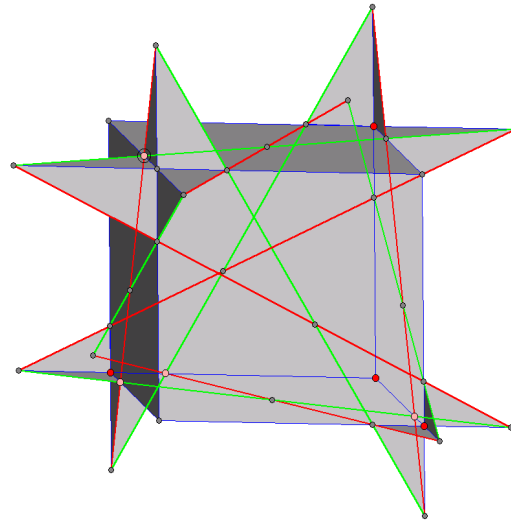


Abbildung 2.5: Eine Doppel-Sechs-Konfiguration

2.3 Über die Gruppe der 27 Geraden

2.3.1 Überblick

Die Gruppe \mathbf{G} derjenigen Permutationen der 27 Geraden einer glatten kubischen Fläche, die die Inzidenzrelationen der Geraden beibehalten (die Fläche selbst bleibt hier also völlig unbeachtet), wurde im Laufe der Jahre ausgiebig studiert. Es sind daher sehr viele Möglichkeiten bekannt, diese Gruppe zu beschreiben, von denen wir in diesem Abschnitt einige kurz vorstellen und auf weiterführende Literatur verweisen.

Schon 1869 zeigte Jordan, daß \mathbf{G} die Ordnung 51.840 und eine einfache Untergruppe \mathbf{H} vom Index 2 besitzt ([Jor, 1957, S. 316-319]), die ihrerseits keine Untergruppe vom Index kleiner als 27 enthält. Dies ist der Grund dafür, daß zur Ermittlung der Geraden eine Gleichung vom Grad 27 gelöst werden muß, da \mathbf{G} auch isomorph zur Galois-Gruppe der Gleichung ist, deren Nullstellen die 27 Geraden einer gegebenen kubischen Fläche liefern. In [Dic, 1901, S. 303-307] betrachtet auch Dickson die Gruppe \mathbf{G} , ausgehend von nur zwei Eigenschaften über die Inzidenzen der von jeweils drei der Geraden gebildeten Dreiecke. Er liefert dort nicht nur die Ordnung von \mathbf{G} und die Existenz der Index-2-Untergruppe \mathbf{H} , sondern außerdem eine umfangreiche Auflistung von zu \mathbf{H} bzw. zu \mathbf{G} isomorphen Gruppen und von Untergruppen von \mathbf{H} und \mathbf{G} .

B. Segre wählt später in [Seg, 1942] eine ganz andere Herangehensweise. Zunächst beschreibt er eine interessante Möglichkeit, die 27 Geraden in die Ebene abzubilden und nutzt diese dann aus, um die Gruppe der 27 Geraden zu studieren. Dies wird

dadurch vereinfacht, daß Inzidenzen der Geraden aus der ebenen Darstellung sofort ablesbar sind.

In der moderneren Theorie behandelt man \mathbf{G} meist als Weyl-Gruppe $W(E_6)$ des Wurzelsystems¹ E_6 , da hierdurch die del Pezzo-Flächen gemeinsam studiert werden können ([Man, 1974, §§25,26]) und die glatten kubischen Flächen nur einen Spezialfall darstellen (für diesen s. auch [Hun, 1996, S. 223-234]).

2.3.2 Ordnung 51.840 und Isomorphie zu $W(E_6)$

In [Har, 1977, Prop. V.4.10] zeigt Hartshorne, daß jede beliebige Menge von 6 verschiedenen, sich gegenseitig nicht schneidenden (*windschiefen*) Geraden auf einer glatten kubischen Fläche die Rolle der 6 exzeptionellen Geraden a_i übernehmen können. Ändert man die Namensgebung also, so daß die 6 neu gewählten Geraden jetzt a_i heißen, so ändern sich die Inzidenzrelationen nicht. Andererseits sind die Namen der restlichen 21 Geraden eindeutig durch die a_i bestimmt: c_{ij} ist die eindeutige Gerade, die a_i und a_j , aber sonst kein a_k trifft, b_i ist die eindeutige Gerade, die alle a_j außer a_i trifft (s. Tabelle 2.3 auf Seite 40).

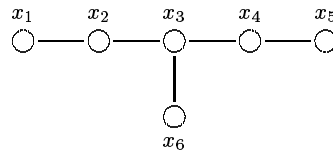
Für jedes 6-Tupel von paarweise windschiefen Geraden existiert also ein eindeutiger *Automorphismus* (eine Permutation, die die Inzidenzrelationen nicht ändert) der 27 Geraden, der die a_i auf die neu gewählten 6 Geraden abbildet. Berechnen wir nun die Anzahl der Möglichkeiten, 6 paarweise windschiefe Geraden zu wählen, so ergibt sich: es gibt 27 Möglichkeiten für a_1 , dann (da jede Gerade genau 10 andere trifft) $27 - 10 - 1 = 16$ für a_2 , $16 - 5 - 1 = 10$ für a_3 (da a_1 und a_2 genau 5 gleiche Geraden treffen und daher a_2 genau fünf noch nicht ausgeschlossene Geraden trifft), $10 - 3 - 1 = 6$ für a_4 , $6 - 3 - 1 = 2$ für a_5 und $2 - 1 = 1$ für a_6 . Insgesamt hat \mathbf{G} also die Ordnung: $27 \cdot 16 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 = 51.840$.

Aus den obigen Ausführungen ersieht man auch sofort, daß \mathbf{G} transitiv auf den 27 Geraden operiert, d.h. daß zu zwei vorgegebenen Geraden l_1, l_2 ein $g \in \mathbf{G}$ existiert, das l_1 auf l_2 abbildet.

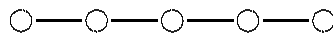
Um nun die Struktur von \mathbf{G} zu ermitteln, zeigen wir, daß ein surjektiver Homomorphismus $\varphi : \mathbf{G} \rightarrow W(E_6)$ existiert. Da die Ordnung der Weyl-Gruppe $W(E_6)$ des Wurzelsystems E_6 ebenfalls 51.840 ist ([Bou, 1968, Abschnitt VI.4.12.(X), S. 219]), ist dann φ sogar ein Isomorphismus.

Um ein solches φ zu konstruieren, müssen wir zunächst kurz die Weyl-Gruppe $W(E_6)$ beschreiben. Es zeigt sich, daß $W(E_6)$ isomorph zur *Coxeter-Gruppe* ist, die dem in Abb. 2.6 dargestellten *Coxeter-Graph* zugeordnet ist (s. u.a. [Bou, 1968, Théorème VI.4.1, S. 193]²). Jeder Knoten des Graphen repräsentiert dabei einen

¹[Bou, 1968] liefert alles Wesentliche zu Weyl-Gruppen von Wurzelsystemen (und Tits-Systemen) und fungiert für die meisten Autoren als Referenz zum Thema. Eine relativ knappe Abhandlung von Wurzelsystemen ist [Ser, 1966, Kap. V]. [Suz, 1982, Kap. 3, §§3,4] stellt zwar einen guten Einstieg in Coxeter-Gruppen dar, behandelt aber nur Weyl-Gruppen von Tits-


 Abbildung 2.6: Coxeter-Graph der Weyl Gruppe $W(E_6)$

Erzeuger x_i der Gruppe (x_6 sei der untere) und es gelten die Relationen: $x_i^2 = 1 \forall i$, $(x_i x_j)^2 = 1$, falls die Knoten i und j nicht durch eine Kante verbunden sind und $(x_i x_j)^3 = 1$, falls die Knoten i und j durch eine Kante verbunden sind. Die dem Graph zugeordnete Coxeter-Gruppe ist also eine Gruppe, die durch Elemente der Ordnung zwei erzeugt wird, die gewisse Relationen erfüllen. Beispielsweise ist die symmetrische Gruppe Σ_6 isomorph zur dem Coxeter-Graph in Abb. 2.7 zugeordneten Coxeter-Gruppe, da Σ_6 von den 5 Involutionen $(12), (23), \dots, (56)$ erzeugt wird.


 Abbildung 2.7: Coxeter-Graph der symmetrischen Gruppe Σ_5

Kommen wir nun zur Gruppe \mathbf{G} . Wie oben beschrieben können wir eine Permutation der 27 Geraden angeben, indem wir sagen, wie sie auf den 6-Tupeln der exceptionellen Geraden operiert. Wir notieren die Permutation, die die Geraden an der i -ten und der j -ten Stelle vertauscht (ij) für alle $i, j = 1, 2, \dots, 6, i \neq j$. Es gilt also beispielsweise:

$$(12)((a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)) = (a_2, a_1, a_3, a_4, a_5, a_6).$$

Die auf $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ wie folgt definierte Permutation π ,

$$\pi((a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)) = (c_{23}, c_{13}, c_{12}, a_4, a_5, a_6),$$

ersetzt im Allgemeinen die 1. Gerade durch die eindeutige Gerade, die die 2. und 3. Gerade trifft, die 4., 5. und 6. Gerade aber nicht trifft und die 2. und 3. Gerade durch entsprechende Geraden.

Um einzusehen, daß diese sechs Permutationen $(12), (23), (34), (45), (56), \pi$ die dem Coxeter-Graph in Abb. 2.8 zugehörige Gruppe erzeugen, müssen wir die Relationen zwischen ihnen überprüfen.

Systemen, nicht von für uns wichtigeren Wurzelsystemen.

²Die dortige Klassifikation der Coxeter-Systeme bzw. die Klassifikation der Wurzelsysteme (Théorème VI.4.3) erklärt auch die Bezeichnung E_6 . Die 6 steht für die Anzahl der Knoten des Graphen und das E ergibt sich durch die Durchnummerierung aller möglichen Typen von Graphen. E_6 ist also der Graph vom 5. bzw. E. Typ mit 6 Knoten.

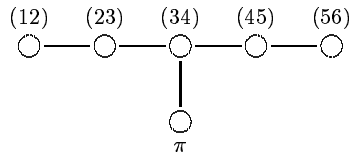


Abbildung 2.8: Coxeter-Graph der Gruppe \mathbf{G}

Da die Permutationen $(12), \dots, (56)$ offenbar Elemente der Ordnung zwei sind, muß diese Eigenschaft nur noch für π nachgewiesen werden. π bildet a_1 auf die eindeutige Gerade c_{23} ab, die die zweite der sechs Geraden, a_2 , und die dritte, a_3 , aber sonst keine der sechs Geraden trifft. Umgekehrt wird $c_{23} = \pi(a_1)$ also auf die eindeutige Gerade a_1 abgebildet, die die zweite der sechs Geraden, $c_{13} = \pi(a_2)$, und die dritte, $c_{12} = \pi(a_3)$, aber sonst keine der sechs Geraden trifft. Da Entsprechendes für c_{12} und c_{13} gilt, haben wir $\pi^2 = 1$ gezeigt.

Die Relationen $((12)(13))^3 = 1$ etc. sowie $((12)(34))^2 = 1$ etc. sind klar. Wir haben daher nur noch die Relationen zwischen den Permutationen (ij) und π zu untersuchen. Betrachten wir zunächst $(34)\pi$:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) &\xrightarrow{(34)} (a_1, a_2, a_4, a_3, a_5, a_6) \xrightarrow{\pi} \\ (c_{24}, c_{14}, c_{12}, a_3, a_5, a_6) &\xrightarrow{(34)} (c_{24}, c_{14}, a_3, c_{12}, a_5, a_6) \xrightarrow{\pi} \\ (c_{23}, c_{13}, a_4, c_{12}, a_5, a_6) &\xrightarrow{(34)} (c_{23}, c_{13}, c_{12}, a_4, a_5, a_6) \xrightarrow{\pi} \\ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6). \end{aligned}$$

Es gilt also: $((34)\pi)^3 = 1$. Zuletzt müssen wir nun noch sehen, daß $((ij)\pi)^2 = 1 \vee (ij) \neq (34)$; dies geschieht aber ganz analog.

Da wir nachgewiesen haben, daß nicht $((34)\pi)^2 = 1$ etc. auftreten kann, bestehen zwischen den Permutationen $(12), \dots, (56)$ und π keine weiteren Relationen³.

Letztendlich haben wir gesehen, daß die Permutationen $(12), \dots, (56)$ und π genau die geforderten Relationen erfüllen, so daß sie eine Gruppe $\mathbf{G}' \subset \mathbf{G}$ erzeugen, die isomorph zur Weyl-Gruppe $W(E_6)$ ist. Ein Vergleich der Ordnungen zeigt nun aber, daß $\mathbf{G}' = \mathbf{G}$ ist und somit der Homomorphismus $\varphi : \mathbf{G} \rightarrow W(E_6)$, definiert

³Für einen Gruppentheoretiker mag dies offensichtlich sein. Um es aber noch etwas klarer zu machen, folgen hier noch ein paar Hinweise: Wegen der Beziehungen $(12)^2$ etc. können alle Relationen der Form $(12)^5(23)^3$ etc. auf Produkte zurückgeführt werden, die die Erzeuger nur in erster Potenz enthalten. Solche wiederum können durch geschicktes Einschleiben von $(12)(12)^{-1} = (12)(12)$ etc. oder Ausnutzen von $(12)(34) = (34)(12)$ etc. verkürzt werden; beispielsweise hat man: $(12)(45)(12)(34) = (12)(12)(45)(34) = (45)(34)$.

durch $\varphi((ij)) = x_i \forall i = 1, 2, \dots, 5, j = i + 1$ sowie $\varphi(\pi) = x_6$ ein Isomorphismus ist:

$$\varphi : \mathbf{G} \xrightarrow{\cong} W(E_6).$$

2.3.3 Andere Darstellungen und Untergruppen

Wir können nun sehr einfach weitere Informationen über die Gruppe der 27 Geraden erhalten, indem wir den Atlas der endlichen Gruppen ([Con, 1985, S. [26]]) zu Rate ziehen. Da, wie oben schon erwähnt, \mathbf{G} bzw. $W(E_6)$ eine einfache Index-2-Untergruppe \mathbf{H} der Ordnung 25.920 hat (die daher eine normale Untergruppe von \mathbf{G} ist), sind dort nämlich viele Eigenschaften von \mathbf{G} und \mathbf{H} aufgeführt.

\mathbf{H} ist demnach beispielsweise isomorph zur unitären Gruppe $U_4(2)$ und zur symplektischen Gruppe $S_4(3)$. Wie schon Jordan in [Jor, 1957, S. 319-329] 1869 nachgewiesen hat, besitzt \mathbf{H} keine Untergruppen vom Index kleiner als 27. Die maximalen Untergruppen von \mathbf{H} haben die Indizes 27, 36, 40 bzw. 45 so daß deren Ordnungen 960, 720, 648 bzw. 576 sind⁴; im Atlas ist auch deren Struktur verzeichnet.

Im Zusammenhang mit kubischen Flächen sind die Indizes dieser maximalen Untergruppen interessant. Der Stabilisator einer der 27 Geraden ist nämlich die maximale Untergruppe vom Index 27, der Stabilisator einer der 36 Doppel-Sechsen ist die maximale Untergruppe vom Index 36 und der Stabilisator einer der 45 Tritangentialebenen ist die maximale Untergruppe vom Index 45.

Einige Untergruppen von \mathbf{G} kann man auch sofort aus dem Coxeter-Graphen in Abb. 2.8 ablesen, da jedem Untergraph wiederum eine Coxeter-Gruppe zugeordnet ist, die eine Untergruppe der Gruppe des gesamten Graphen ist ([Bou, 1968, Abschnitt IV.1.8]). Der Graph in Abb. 2.7 ist beispielsweise ein solcher Untergraph von \mathbf{G} ; die zugehörige Coxeter-Gruppe Σ_6 ist daher eine Untergruppe von \mathbf{G} vom Index 72 ($51.840 = 72 \cdot 6! = 72 \cdot 720$). Diese ist allerdings nicht maximal; der Atlas verrät uns nämlich, daß sie in der maximalen Untergruppe $\Sigma_6 \times \mathbf{Z}_2$ enthalten ist.

Der Atlas gibt aber nicht nur abstrakte Informationen über \mathbf{G} , sondern verrät auch, daß \mathbf{G} isomorph zum Stabilisator einer Bitangente in der Symmetriegruppe der 28 Bitangenten einer allgemeinen ebenen Quartik ist und die 27 verbleibenden Bitangenten in natürlicher Weise den 27 Geraden auf einer kubischen Fläche entsprechen (s. dazu auch [Gei, 1870]). Eine Diskussion der Gruppe $\mathbf{G} \cong W(E_6)$ findet sich auch in [Hun, 1996, S. 223-234]. Für den Zusammenhang der Gruppe \mathbf{G} in der allgemeineren Theorie der del Pezzo Flächen verweisen wir nochmals auf [Man, 1974, insbes. §§25,26].

⁴All dies findet sich schon bei Dickson ([Dic, 1901, Ende Kap. XIV, S. 307]).

Kapitel 3

Explizite Berechnung der Gleichungen

Ausgehend von einer Basis $(\varphi_0, \dots, \varphi_3) \in (\mathbf{C}[X_0, \dots, X_3]_3)^3$ des Linearsystems L aller ebenen Kubiken durch sechs Punkte $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden und nicht alle sechs auf einer gemeinsamen Konik liegen, haben wir im Abschnitt 1.3, Satz 1.18, gezeigt, daß sich der Blow-Up $\tilde{\mathbf{P}}^2 := Bl_{\{P_1, \dots, P_6\}}(\mathbf{P}^2)$ des \mathbf{P}^2 in diesen sechs Punkten vermöge $\tilde{\varphi}_L : \tilde{\mathbf{P}}^2 \hookrightarrow \mathbf{P}^3$ in den \mathbf{P}^3 einbetten läßt und so eine kubische Fläche im \mathbf{P}^3 liefert.

In diesem Kapitel wählen wir nun eine ganz bestimmte Basis dieses Linearsystems, um daraus explizite Gleichungen für die korrespondierende kubische Fläche, deren 45 Tritangentialebenen und 27 Geraden, sowie der Koordinaten des Bildes eines einzelnen Punktes zu erhalten.

Im anschließenden 4. Kapitel werden wir diese Gleichungen dann nutzen, um konkrete Punkt-Konfigurationen zu studieren. Dabei werden wir meist von Punkten im $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ ausgehen; die hier vorgestellten Resultate treffen aber ebenfalls auf Punkte im $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ zu. Mit Hilfe solcher Punkte ist es möglich, kubische Flächen zu erhalten, deren Geraden nicht alle reell sind, was, wie wir sehen werden, ausschließlich mit reellen Punkten nicht erreicht werden kann.

Im Wesentlichen basieren die hier dargestellten Resultate auf dem Artikel von Arthur Coble [Cob, 1915] aus dem Jahr 1915. Allerdings ist die hier gewählte Herangehensweise eine andere. Wir starten nämlich mit einem aus geometrischen Gründen offensichtlichen Erzeugendensystem des Linearsystems und erhalten daraus in natürlicher Weise genau die gleichen sechs Erzeuger, die Coble durch invariantentheoretische Betrachtungen ermittelt. Trotzdem sind die von Coble benutzten Notationen sehr nützlich; wir verwenden sie daher auch und stellen sie im folgenden Abschnitt zusammen.

3.1 Notationen

Determinanten

Es werden nur Determinanten solcher Matrizen verwendet werden, die aus mehreren Spaltenvektoren zusammengestellt werden, nämlich den Koordinatenvektoren von Punkten des \mathbf{P}^2 . Seien daher Q_1, \dots, Q_6 sechs Punkte des \mathbf{P}^2 mit Koordinaten $(Q_{ix} : Q_{iy} : Q_{iz}), i = 1, 2, \dots, 6$. Für Indizes $i, j, k, l, m \in \{1, 2, \dots, 6\}$ definieren wir:

- $(ij)_{xy} := \det \begin{pmatrix} Q_{ix} & Q_{jx} \\ Q_{iy} & Q_{jy} \end{pmatrix}$, $(ij)_{xz}$ und $(ij)_{yz}$ analog,
- $(ijx) := \det \begin{pmatrix} Q_{ix} & Q_{jx} & x \\ Q_{iy} & Q_{jy} & y \\ Q_{iz} & Q_{jz} & z \end{pmatrix}$
- $(ijk) := \det \begin{pmatrix} Q_{ix} & Q_{jx} & Q_{kx} \\ Q_{iy} & Q_{jy} & Q_{ky} \\ Q_{iz} & Q_{jz} & Q_{kz} \end{pmatrix}$,
- $(ijklmx^2) := \det \begin{pmatrix} Q_{ix}^2 & Q_{jx}^2 & Q_{kx}^2 & Q_{lx}^2 & Q_{mx}^2 & x^2 \\ Q_{ix}Q_{iy} & Q_{jx}Q_{jy} & Q_{kx}Q_{ky} & Q_{lx}Q_{ly} & Q_{mx}Q_{my} & xy \\ Q_{ix}Q_{jz} & Q_{jx}Q_{jz} & Q_{kx}Q_{kz} & Q_{lx}Q_{lz} & Q_{mx}Q_{mz} & xz \\ Q_{iy}^2 & Q_{jy}^2 & Q_{ky}^2 & Q_{ly}^2 & Q_{my}^2 & y^2 \\ Q_{iy}Q_{jz} & Q_{jy}Q_{jz} & Q_{ky}Q_{kz} & Q_{ly}Q_{lz} & Q_{my}Q_{mz} & yz \\ Q_{iz}^2 & Q_{jz}^2 & Q_{kz}^2 & Q_{lz}^2 & Q_{mz}^2 & z^2 \end{pmatrix}$.

Zu bemerken ist hierzu, daß es sich bei (ijx) offenbar um die Gleichung der Geraden durch die zwei Punkte p_i und p_j des \mathbf{P}^2 handelt. Dies ergibt sich sofort, wenn man bedenkt, daß eine Determinante genau dann null ist, wenn die drei Spaltenvektoren linear abhängig sind. Letzteres ist natürlich genau dann der Fall, wenn ein dritter Punkt (x, y, z) auf der Geraden liegt. Wir werden daher im Folgenden auch von der Geraden (ijx) , für $i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}, i \neq j$ reden. Entsprechend ist (ijk) der Funktionswert der linearen Funktion (ijx) im Punkt P_k .

Analoges gilt für $(ijklmx^2)$, $i, j, k, l, m \in \{1, 2, \dots, 6\}$, i, j, k, l, m paarweise verschieden; dies ist die Gleichung der eindeutigen Konik durch die fünf verschiedenen Punkte Q_i, \dots, Q_m . Beim Analogon für Kubiken muß man ein wenig aufpassen, da die Gleichung, die man erhält, nicht notwendigerweise eindeutig ist wegen des Satzes vom 9. Punkt (Satz 1.14, S. 26).

Gemeinsamer Schnittpunkt dreier Geraden

Ein Eckardt-Punkt (Definition 1.6) ist ein glatter Punkt einer kubischen Fläche, in dem sich drei Geraden treffen. Da die Verbindungsgeraden zwischen den sechs

Fundamental – Punkten der Ebene auf Geraden der Fläche abgebildet werden (Satz 1.21) und jeder Punkt außer den sechs einen eindeutigen Bildpunkt auf der Fläche hat, ist das Bild des gemeinsamen Schnittpunktes dreier der Verbindungsgeraden in der Ebene ein Eckardt-Punkt der Fläche. Wir suchen nun einen Indikator dafür, ob ein solcher Fall eintritt, ob sich also drei verschiedene der 15 Verbindungsgeraden der sechs Punkte P_1, P_2, \dots, P_6 des \mathbf{P}^2 in einem Punkt schneiden.

Lemma / Notation 3.1 *Die Geraden (ijx) , (klx) , (mnx) schneiden sich genau dann in einem Punkt, wenn*

$$(ij, kl, mn) := (ijm)(kln) - (ijn)(klm) = 0.$$

Beweis: Den Beweis dieser und vieler weiterer nützlicher Eigenschaften des Indikators liefert der folgende Satz 3.2. \square

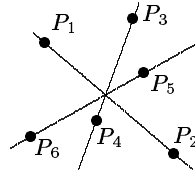


Abbildung 3.1: $(12, 34, 56) = (125)(346) - (126)(345) = 0$.

Satz 3.2 (Eigenschaften von (ij, kl, mn))

Seien wieder sechs Punkte P_1, P_2, \dots, P_6 des \mathbf{P}^2 gegeben. Dann gilt:

1. Der Indikator lässt sich als Determinante schreiben:

$$(ij, kl, mn) = \det \begin{pmatrix} (ij)_{xy} & (kl)_{xy} & (mn)_{xy} \\ (ij)_{xz} & (kl)_{xz} & (mn)_{xz} \\ (ij)_{yz} & (kl)_{yz} & (mn)_{yz} \end{pmatrix}.$$

für alle $i, j, k, l, m, n \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

2. Eine Vertauschung zweier Punkte innerhalb einer Geraden hat einen Vorzeichenwechsel des Indikators zur Folge:

$$(ij, kl, mn) = -(ji, kl, mn) = -(ij, lk, mn) = -(ij, kl, nm)$$

für alle $i, j, k, l, m, n \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

3. Eine Vertauschung zweier Geraden hat einen Vorzeichenwechsel des Indikators zur Folge:

$$(ij, kl, mn) = -(kl, ij, mn) = -(ij, mn, kl) = -(mn, kl, ij)$$

für alle $i, j, k, l, m, n \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

4. (ij, kl, mn) entspricht dem Funktionswert der linearen Funktion (ijx) , wenn man für x den Schnittpunkt der beiden Geraden (klx) und (mnx) einsetzt.
5. $(ij, kl, mn) = 0 \iff$ Die drei Geraden (ijx) , (klx) und (mnx) schneiden sich in einem Punkt.

Beweis: Die 2. und 3. Eigenschaft folgen unmittelbar aus der 1. durch eine Spaltenvertauschung.

Die 1. ergibt sich folgendermaßen. Schreiben wir die einzelnen Determinanten

$$(ijm) = \begin{pmatrix} m_x(ij)_{yz} - m_y(ij)_{xz} + m_z(ij)_{xy} \end{pmatrix},$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} (ij, kl, mn) &= (ijm)(kln) - (ijn)(klm) \\ &= (ij)_{yz} \left(m_x(kln) - n_x(klm) \right) \\ &\quad - (ij)_{xz} \left(m_y(kln) - n_y(klm) \right) \\ &\quad + (ij)_{xy} \underbrace{\left(m_z(kln) - n_z(klm) \right)}_{=: \text{Klammer}}. \end{aligned}$$

Die einzelnen Klammern können wir ebenso umschreiben:

$$\begin{aligned} \text{Klammer} &= m_z \left(n_x(kl)_{yz} - n_y(kl)_{xz} + n_z(kl)_{xy} \right) \\ &\quad - n_z \left(m_x(kl)_{yz} - m_y(kl)_{xz} + m_z(kl)_{xy} \right) \\ &= (m_z n_x - n_z m_x)(kl)_{yz} \\ &\quad - (m_z n_y - n_z m_y)(kl)_{xz} \\ &\quad + \underbrace{(m_z n_z - n_z m_z)}_{=0} (kl)_{xy} \\ &= (mn)_{yz}(kl)_{xz} - (mn)_{xz}(kl)_{yz} \\ &= \det \begin{pmatrix} (kl)_{xz} & (mn)_{xz} \\ (kl)_{yz} & (mn)_{yz} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also die 1. Eigenschaft.

Die 4. Behauptung ist nun ebenfalls offensichtlich, da die drei Determinanten der Form $\det \begin{pmatrix} (kl)_{xz} & (mn)_{xz} \\ (kl)_{yz} & (mn)_{yz} \end{pmatrix}$ die Koordinaten des Schnittpunktes darstellen, wie man durch analoges Nachrechnen zeigt. Aus der 4. folgt nun aber unmittelbar die 5. Eigenschaft. \square

Summen

Der leichten Lesbarkeit halber werden wir häufig mit Buchstaben a, \dots, f arbeiten, statt diese durchnummerieren. a, \dots, f bezeichnen dabei entweder homogene Kubiken im \mathbf{P}^2 , liegen also in $\mathbf{C}[x, y, z]_3$, oder bezeichnen die Koordinaten

$(a : \dots : f)$ des \mathbf{P}^5 . $\bar{a}, \dots, \bar{f} \in \mathbf{C}$ bezeichnen immer Konstanten. Sowohl die Kubiken a, \dots, f als auch die Konstanten \bar{a}, \dots, \bar{f} werden von den einmal fest gewählten Punkten $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$ abhängen; der Kürze wegen benutzen wir aber nicht die korrektere Notation a_{P_1, \dots, P_6} etc.

$$\begin{aligned}
 \sum a &:= a + \dots + f \left(\begin{array}{l} \text{dies ist entweder eine Kubik in } \mathbf{C}[x, y, z] \\ \text{oder eine lineare Funktion in } \mathbf{C}[a, \dots, f] \end{array} \right), \\
 \sum a^3 &:= a^3 + \dots + f^3 \left(\begin{array}{l} \text{entweder eine Nonik in } \mathbf{C}[x, y, z] \\ \text{oder eine Kubik in } \mathbf{C}[a, \dots, f] \end{array} \right), \\
 \sum \bar{a}a &:= \bar{a}a + \dots + \bar{f}f \left(\begin{array}{l} \text{entweder eine Kubik in } \mathbf{C}[x, y, z] \\ \text{oder eine lineare Funktion in } \mathbf{C}[a, \dots, f] \end{array} \right), \\
 \sum \bar{a}\bar{b} &:= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \dots + \bar{a}\bar{f} + \bar{b}\bar{c} + \dots + \bar{b}\bar{f} + \bar{c}\bar{d} + \dots + \bar{e}\bar{f} \in \mathbf{C}.
 \end{aligned}$$

Gelegentlich verwenden wir auch folgende Abkürzungen:

$$a_2 := \sum \bar{a}\bar{b} \in \mathbf{C}, \quad a_3 := \sum \bar{a}\bar{b}\bar{c} \in \mathbf{C}, \quad a_4 := \sum \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} \in \mathbf{C}, \quad a_5 := \sum \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e} \in \mathbf{C}.$$

3.2 Die Fläche

Für diesen Abschnitt seien nun sechs Punkte $P_1, P_2, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$ allgemeiner Lage (also keine drei auf einer Geraden, nicht alle sechs auf einer Konik) fest vorgegeben. Wie schon zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, werden wir durch die Wahl bestimmter Erzeuger des Linearsystems L aller Kubiken durch diese sechs Punkte die Gleichung der Fläche in expliziter Form, abhängig von den Koordinaten der Punkte, angeben.

Da diese Darstellung symmetrisch in den sechs Punkten sein soll, können wir nicht erwarten, mit vier Erzeugern des projektiv drei-dimensionalen Linearsystems (Satz 1.13) auszukommen. Wir suchen daher sechs spezielle Kubiken $a_{P_1, \dots, P_6}, \dots, f_{P_1, \dots, P_6}$ (der Kürze halber a, \dots, f notiert), die erstens das Linearsystem erzeugen und zweitens durch Permutation der Punkte nur untereinander permutiert werden.

Zwischen diesen sechs Erzeugern des projektiv drei-dimensionalen Linearsystems L müssen $6 - 4 = 2$ lineare Beziehungen bestehen. Wir werden so spezielle Kubiken finden, daß eine dieser Beziehungen $\sum a = a + \dots + f = 0$ ist und außerdem $\sum a^3$ identisch verschwindet. Dann werden wir solche Konstanten \bar{a}, \dots, \bar{f} ermitteln, die ebenfalls von den sechs Punkten abhängen, so daß gilt: $\sum \bar{a}a = 0$. Alle diese Summen ändern, wie wir ebenfalls sehen werden, unter Permutationen der Punkte P_1, \dots, P_6 höchstens ihr Vorzeichen. Die Mengen $\{\sum a^3 = 0\}$, $\{\sum a = 0\}$ und $\{\sum \bar{a}a = 0\}$ hängen somit nicht von der Permutation der 6 Punkte ab.

Fassen wir dann die Buchstaben a, \dots, f als Koordinaten des \mathbf{P}^5 auf, so ist $\sum a^3 = 0$ die Gleichung einer kubischen Fläche, die mittels $\sum a = 0$ und $\sum \bar{a}a = 0$ in den \mathbf{P}^3 eingebettet werden kann. In Abschnitt 3.2.3 werden wir sehen, daß dies genau die kubische Fläche ist, die wir durch Aufblasen des \mathbf{P}^2 in den sechs Punkten erhalten.

3.2.1 Die Erzeuger a, \dots, f

Die Suche nach Erzeugern des Linearsystems L , die den eben beschriebenen Symmetrie-Bedingungen genügen sollen, beginnen wir mit der Betrachtung der einfachsten Kubiken durch die sechs Punkte, die man sich vorstellen kann, nämlich den Produkten von je drei verschiedenen Geraden durch je zwei der Punkte. Die 15 Kubiken dieser Art haben (bis auf ein Vorzeichen) Gleichungen $c_1 := (12x)(34x)(56x) = 0$, $c_2 := (12x)(35x)(46x) = 0$, \dots , $c_{15} = (16x)(25x)(34x) = 0$ (s. Abb. 3.2) und werden unter Punkt – Permutationen aufeinander abgebildet.

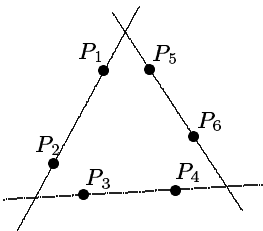


Abbildung 3.2: Eine der 15 speziellen Kubiken durch die 6 Punkte

Wir zeigen zunächst, daß diese 15 Kubiken das gesamte Linearsystem L erzeugen und wählen anschließend geschickt 6 Linearkombinationen a, \dots, f dieser 15 Erzeuger, aus denen wiederum die 15 c_i zurück erhalten werden können ($\{a, \dots, f\}$ ist somit auch ein Erzeugendensystem von L) und die alle oben geforderten Eigenschaften erfüllen.

Satz 3.3 (15 Erzeuger des Linearsystems)

Die 15 Produkte $c_i, i = 1, 2, \dots, 15$ aus jeweils drei verschiedenen Geraden erzeugen das Linearsystem L aller Kubiken durch die sechs Punkte.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß jede Kubik durch die sechs Punkte als Linearkombination der 15 speziellen dargestellt werden kann; sei also C eine beliebige Kubik durch P_1, \dots, P_6 . Ist C eine der c_i , so sind wir fertig. Ansonsten existiert ein Punkt P auf C , der nicht auf einer der $c_i, i = 1, 2, \dots, 15$ liegt. Wir werden zeigen, daß das von den c_i erzeugte Linearsystem das Linearsystem L_P aller Kubiken durch P_1, \dots, P_6 und P enthält. Dann läßt sich C durch die c_i linear kombinieren und die Behauptung ist bewiesen.

Betrachten wir dazu zunächst das Erzeugnis zweier c_i , die eine Gerade gemeinsam haben, beispielsweise die Kubiken $c_1 = (12x)(34x)(56x)$ und $c_2 = (12x)(35x)(46x)$. Jede Linearkombination von c_1 und c_2 enthält die Gerade $(12x)$ als Faktor.

Die beiden linear unabhängigen Koniken $(34x)(56x)$ und $(35x)(46x)$ erzeugen aber das ein-dimensionale (Beweis analog zu 1.13) Linearsystem aller Koniken durch die Punkte P_3, \dots, P_6 .

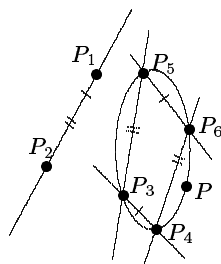


Abbildung 3.3: Zwei der 15 Erzeuger, die eine Gerade gemein haben, können zu einer Kubik, bestehend aus der Geraden und einer Konik durch einen beliebigen weiteren Punkt P , linear kombiniert werden.

Daher kann mittels c_1 und c_2 die Kubik $k_{12} := (12x)(3456Px^2)$ gebildet werden, die aus der Geraden $(12x)$ und der eindeutigen Konik durch die 5 Punkte P_3, P_4, P_5, P_6 und P besteht.

Auf analoge Weise erhalten wir die Kubiken $k_{34} := (34x)(1256Px^2)$ und $k_{56} := (56x)(1234Px^2)$, die gemeinsam mit k_{12} das zwei-dimensionale (Satz 1.13) Linear-system L_P der Kubiken durch P_1, \dots, P_6 und P erzeugen (Abb. 3.4). Für den

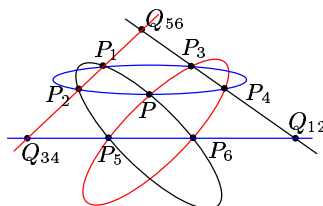


Abbildung 3.4: Die drei Kubiken, jeweils bestehend aus einer Geraden und einer Konik durch P , erzeugen das Linearsystem aller Kubiken durch die sieben Punkte.

Punkt $Q_{12} := (34x) \cap (56x)$ gilt nämlich $k_{12}(Q_{12}) \neq 0 = k_{34}(Q_{12}) = k_{56}(Q_{12})$, so daß k_{12} nicht als Linearkombination von k_{34} und k_{56} darstellbar ist. Aus Symmetriegründen gilt Entsprechendes auch für k_{34} und k_{56} ; k_{12}, k_{34} und k_{56} sind also linear unabhängig und erzeugen daher L_P . \square

Wir suchen nun sechs Linearkombinationen a, \dots, f der c_i , die alle eingangs geforderten Bedingungen erfüllen, insbesondere müssen sie also durch Punkt – Permutationen (bis auf ein Vorzeichen) aufeinander abgebildet werden und die Summe $\sum a$ muß verschwinden.

Eine Summe aus fünf der c_i , die insgesamt genau alle 15 Geraden beinhalten, wird unter Punkt – Permutationen wieder auf eine solche Summe abgebildet. Unsicher ist nur, wie sich die Vorzeichen der einzelnen Summanden verhalten. Beginnen wir

beispielsweise¹ mit

$$a := (25x)(13x)(46x) + (51x)(42x)(36x) + (14x)(35x)(26x) + (43x)(21x)(56x) + (32x)(54x)(16x) \quad (3.1)$$

und permutieren nun die Punkte, erhalten wir andere Summen. Unter den fünf Permutationen (12), ..., (16) wird a abgebildet auf:

$$\begin{aligned} a &= (25x)(13x)(46x) + (51x)(42x)(36x) + (14x)(35x)(26x) + (43x)(21x)(56x) + (32x)(54x)(16x), \\ a^{(12)} &= (15x)(23x)(46x) + (52x)(41x)(36x) + (24x)(35x)(16x) + (43x)(12x)(56x) + (31x)(54x)(26x), \\ a^{(13)} &= (25x)(31x)(46x) + (53x)(42x)(16x) + (34x)(15x)(26x) + (41x)(23x)(56x) + (12x)(54x)(36x), \\ a^{(14)} &= (25x)(43x)(16x) + (54x)(12x)(36x) + (41x)(35x)(26x) + (13x)(24x)(56x) + (32x)(51x)(46x), \\ a^{(15)} &= (21x)(53x)(46x) + (15x)(24x)(36x) + (54x)(31x)(26x) + (43x)(25x)(16x) + (32x)(14x)(56x), \\ a^{(16)} &= (25x)(63x)(41x) + (56x)(42x)(31x) + (64x)(35x)(21x) + (43x)(26x)(51x) + (32x)(54x)(61x). \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die anderen Vertauschungen zweier Punkte, so zeigt sich:

$$\begin{aligned} a^{(12)} &= a^{(34)} = a^{(56)}, \\ a^{(13)} &= a^{(25)} = a^{(46)}, \\ a^{(14)} &= a^{(35)} = a^{(26)}, \\ a^{(15)} &= a^{(24)} = a^{(36)}, \\ a^{(16)} &= a^{(45)} = a^{(23)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Es gilt also $(a - a^{(12)})^{(12)} = a^{(12)} - a^{(12)(12)} = a^{(12)} - a = -(a - a^{(12)})$ und Entsprechendes für die Permutationen (34) und (56). Die Kubik $(a - a^{(12)})$ ist also eine Linearkombination aus Produkten von jeweils drei der 15 Geraden, die unter den Permutationen (12), (34) und (56) das Vorzeichen wechselt. Eine solche ist: $(12x)(34x)(56x)$; und tatsächlich zeigt eine längere Rechnung²:

$$(a - a^{(12)}) = 4 \cdot (12x)(34x)(56x).$$

¹Eine natürlichere Wahl wäre wahrscheinlich: $a' := (12x)(34x)(56x) + (13x)(25x)(46x) + (14x)(35x)(26x) + (15x)(24x)(36x) + (16x)(23x)(45x)$. Bei genauer Betrachtung fällt aber auf, daß $a = a'$ gilt – die Reihenfolge der Produkte haben wir aus historischen Gründen gewählt, es ist nämlich die von Coble benutzte (dieser verweist wiederum auf einen Artikel von Joubert über Invarianten des Punktsystems P_6^1).

Wir könnten übrigens nicht jede beliebige Summe dieser Art für a wählen. Es gibt zwar, bis auf Vorzeichen, nur genau sechs unterschiedliche solche Summen: Fixieren wir die erste Gerade $(12x)$, so bleiben für die nächste die drei Möglichkeiten $(34x)$, $(35x)$ und $(36x)$; haben wir uns für eine (oBdA. $(34x)$) entschieden, haben wir beim Produkt, in dem der Faktor $(13x)$ auftritt, nur noch 2 Geraden ($(25x)$ oder $(26x)$) zur Auswahl. Die restlichen Produkte sind dann schon bis auf Vorzeichen festgelegt, so daß wir insgesamt $2 \cdot 3 = 6$ bis auf Vorzeichen unterschiedliche Summen erhalten. Eine andere Wahl der Vorzeichen liefert aber nicht unbedingt ein a , daß unter Permutationen auf nur 5 andere Summen abgebildet wird. Beispielsweise gilt für $a'' := (21x)(34x)(56x) + (13x)(25x)(46x) + (14x)(35x)(26x) + (15x)(24x)(36x) + (16x)(23x)(45x)$: $a''^{(15)(13)} \notin \{a'', -a''^{(12)}, -a''^{(13)}, -a''^{(14)}, -a''^{(15)}, -a''^{(16)}\}$. Allerdings gibt es nur 2^4 verschiedene Möglichkeiten, die Vorzeichen zu verteilen; mit Hilfe eines Programmes wie dem Singular-Skript [Lab, 2001b] ist das Ausprobieren daher kein großer Aufwand und auch per Hand überlegt man es sich schnell.

²Diese aufwendige Rechnung führen wir hier nicht vor; man kann die Arbeit beispielsweise vom Singular-Skript [Lab, 2001b] erledigen lassen.

Definieren wir nun die fünf ebenen Kubiken

$$d := -a^{(12)}, f := -a^{(13)}, c := -a^{(14)}, b := -a^{(15)}, e := -a^{(16)} \quad (3.3)$$

(die Wahl der ungewöhnlichen Reihenfolge erklärt sich später), so ergeben sich zunächst die Summen $a + b, a + c, \dots, a + f$ (s. Tabelle 3.5). Analog zu (3.2) können wir aber alle Beziehungen zwischen den a, \dots, f aufschreiben:

Lemma 3.4 *Die in (3.1) und (3.3) definierten Kubiken $a, b, \dots, f \in \mathbf{C}[x, y, z]_3$, die von den sechs Punkten $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$ abhängen, werden unter Punkt - Permutationen (bis auf ein Vorzeichen) aufeinander abgebildet. Es gilt genauer:*

$$\begin{aligned} a^{(12)} &= -d, & b^{(12)} &= -e, & c^{(12)} &= -f, \\ a^{(13)} &= -f, & b^{(13)} &= -d, & c^{(13)} &= -e, \\ a^{(14)} &= -c, & b^{(14)} &= -f, & d^{(14)} &= -e, \\ a^{(15)} &= -b, & c^{(15)} &= -d, & e^{(15)} &= -f, \\ a^{(16)} &= -e, & b^{(16)} &= -c, & d^{(16)} &= -f, \\ a^{(23)} &= -e, & b^{(23)} &= -f, & c^{(23)} &= -d, \\ a^{(24)} &= -b, & c^{(24)} &= -e, & d^{(24)} &= -f, \\ a^{(25)} &= -f, & b^{(25)} &= -c, & d^{(25)} &= -e, \\ a^{(26)} &= -c, & b^{(26)} &= -d, & e^{(26)} &= -f, \\ a^{(34)} &= -d, & b^{(34)} &= -c, & e^{(34)} &= -f, \\ a^{(35)} &= -c, & b^{(35)} &= -e, & d^{(35)} &= -f, \\ a^{(36)} &= -b, & c^{(36)} &= -f, & d^{(36)} &= -e, \\ a^{(45)} &= -e, & b^{(45)} &= -d, & c^{(45)} &= -f, \\ a^{(46)} &= -f, & b^{(46)} &= -e, & c^{(46)} &= -d, \\ a^{(56)} &= -d, & b^{(56)} &= -f, & c^{(56)} &= -e. \quad \square \end{aligned} \quad (3.4)$$

Daraus können wir - wie vor dem Lemma erläutert - die im folgenden Lemma aufgeführte Tabelle ermitteln:

Lemma 3.5 *Zwischen den in (3.1) und (3.3) definierten ebenen Kubiken $a, b, \dots, f \in \mathbf{C}[x, y, z]_3$, die von den sechs Punkten $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$ abhängen, bestehen die folgenden 15 Beziehungen:*

$$\begin{aligned}
 a + b &= 4(51x)(42x)(36x), \\
 a + c &= 4(53x)(41x)(26x), \\
 a + d &= 4(43x)(21x)(56x), \\
 a + e &= 4(32x)(54x)(16x), \\
 a + f &= 4(25x)(13x)(46x), \\
 b + c &= 4(34x)(25x)(16x), \\
 b + d &= 4(31x)(45x)(26x), \\
 b + e &= 4(12x)(53x)(46x), \\
 b + f &= 4(23x)(14x)(56x), \\
 c + d &= 4(15x)(32x)(46x), \\
 c + e &= 4(13x)(42x)(56x), \\
 c + f &= 4(54x)(21x)(36x), \\
 d + e &= 4(25x)(41x)(36x), \\
 d + f &= 4(24x)(53x)(16x), \\
 e + f &= 4(15x)(43x)(26x).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Insbesondere erzeugen a, \dots, f also nach Satz 3.3 das Linearsystem L aller ebenen Kubiken durch die sechs Punkte. \square

Die sechs homogenen Kubiken $a, \dots, f \in \mathbf{C}[x, y, z]_3$ werden nach Lemma 3.4 unter Punkte – Permutationen (bis auf ein Vorzeichen) aufeinander abgebildet und erzeugen das Linearsystem aller Kubiken durch die sechs Punkte nach Lemma 3.5. Die erste Bedingung, die wir zu Beginn des Kapitels an die Kubiken gestellt haben, ist somit erfüllt.

Mit Hilfe der Tabelle (3.5) ergibt sich sogleich die nächste geforderte Eigenschaft; teilen wir nämlich die Summe $\sum a$ auf, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \sum a &= (a + b) + (c + d) + (e + f) \\
 &= 4\left((51x)(42x)(36x) + (15x)(32x)(46x) + (15x)(43x)(26x)\right) \\
 &= 4(15x) \underbrace{\left((24x)(36x) + (32x)(46x) + (43x)(26x)\right)}_{=:k}.
 \end{aligned}$$

Die Gleichung zweiten Grades in der Klammer, k , verschwindet aber, da für den Vorfaktor von z in k

$$\begin{aligned}
 k_z &= 2_x 4_y 3_x 6_y - 2_x 4_y 6_x 3_y - 2_y 4_x 3_x 6_y + 2_y 4_x 6_x 3_y \\
 &\quad + 3_x 2_y 4_x 6_y - 3_x 2_y 6_x 4_y - 3_y 2_x 4_x 6_y + 3_y 2_x 6_x 4_y \\
 &\quad + 4_x 3_y 2_x 6_y - 4_x 3_y 6_x 2_y - 4_y 3_x 2_x 6_y + 4_y 3_x 6_x 2_y \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

und Entsprechendes für die Vorfaktoren von x und y gilt. Insgesamt haben wir also gezeigt:

Lemma 3.6 *Für die in (3.1) und (3.3) definierten Kubiken $a, b, \dots, f \in \mathbf{C}[x, y, z]_3$, die von den sechs Punkten $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$ abhängen, gilt:*

$$\sum a = 0. \quad \square$$

Der eben vorgeführte Beweis zeigt eine weitere Eigenschaft der a, \dots, f . Drei Kubiken der Form $(a + d)$, $(b + e)$ und $(c + f)$ haben jeweils gerade solche Vorzeichen, daß ihre Summe verschwindet. Der Beweis von Satz 3.3 zeigte bereits, daß eine nichttriviale Linearkombination dreier Kubiken, die eine Gerade gemein haben, existieren muß, die identisch verschwindet; die hier gefundene Lösung $1 \cdot (a + d) + 1 \cdot (b + e) + 1 \cdot (c + f) = 0$ ist aber sehr speziell.

Noch eine weitere Symmetrie-Eigenschaft haben die Erzeuger a, \dots, f :

Lemma 3.7 *Die in (3.1) und (3.3) definierten Kubiken $a, b, \dots, f \in \mathbf{C}[x, y, z]_3$, die von den sechs Punkten $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$ abhängen, lassen sich in der folgenden symmetrischen Weise aufschreiben:*

$$\begin{aligned} a &= && + (15x)(24x)(36x) + (14x)(35x)(26x) + (12x)(43x)(56x) + (23x)(45x)(16x) + (13x)(52x)(46x), \\ b &= + (15x)(24x)(36x) && + (25x)(34x)(16x) + (13x)(54x)(26x) + (12x)(35x)(46x) + (14x)(23x)(56x), \\ c &= + (14x)(35x)(26x) + (25x)(34x)(16x) && + (15x)(32x)(46x) + (13x)(24x)(56x) + (12x)(45x)(36x), \\ d &= + (12x)(43x)(56x) + (13x)(54x)(26x) + (15x)(32x)(46x) && + (14x)(52x)(36x) + (24x)(35x)(16x), \\ e &= + (23x)(45x)(16x) + (12x)(35x)(46x) + (13x)(24x)(56x) + (14x)(52x)(36x) && + (15x)(34x)(26x), \\ f &= + (13x)(52x)(46x) + (14x)(23x)(56x) + (12x)(45x)(36x) + (24x)(35x)(16x) + (15x)(34x)(26x). \quad \square \end{aligned}$$

Nachdem wir inzwischen sehr vieles über die Erzeuger herausgefunden haben, bleibt immer noch eines zu zeigen, nämlich:

Lemma 3.8 *Für die in (3.1) und (3.3) definierten Kubiken $a, b, \dots, f \in \mathbf{C}[x, y, z]_3$, die von den sechs Punkten $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$ abhängen, gilt:*

$$\sum a^3 = a^3 + \dots + f^3 = 0.$$

Beweis: Leider kenne ich kein einfaches Argument, aus dem dies unmittelbar folgt. Zwar können wir die Summe einfach ausrechnen (auch das erledigt das Singular-Skript [Lab, 2001b]), allerdings ist ein solcher Beweis nicht wirklich zufriedenstellend. Für eine elegantere Begründung der Tatsache verweisen wir daher auf [Cob, 1915, S. 168, 169]³. \square

³Coble folgert dort aus seinen Betrachtungen von Invarianten des Punktsystems P_6^1 von sechs Punkten des \mathbf{P}^1 , daß für die sechs aus diesen Punkten gebildeten Funktionen A, \dots, F gilt: $\sum A^3 = 0$ bzw. $\sum A = 0$. Da die Funktionen A, \dots, F den a, \dots, f entsprechen, wenn man statt der ternären Determinanten (ijx) die binäre (ij) einsetzt, kann er daraus auf $\sum a^3 = 0$ bzw. $\sum a = 0$ schließen. Für diesen Schritt benutzt er das Transferenzprinzip von Clebsch; dieses wiederum ist allerdings keineswegs einfach zu verstehen. Es hängt ebenfalls mit Invariantentheorie zusammen; wichtige Artikel zum Thema sind: [Aro, 1863], [Aro, 1858], [Cle, 1861a], [CG, 1873].

3.2.2 Die Koeffizienten \bar{a}, \dots, \bar{f}

Wie wir bereits zu Beginn dieses Kapitels gesehen haben, müssen zwischen den sechs Erzeugern a, \dots, f des drei-dimensionalen Linearsystems aller Kubiken durch sechs Punkte $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$ allgemeiner Lage zwei lineare Beziehungen bestehen. Da wir im letzten Abschnitt eine dieser beiden nachgewiesen haben, nämlich $\sum a = 0$, müssen wir noch eine finden. Die Vorfaktoren der Kubiken a, \dots, f bezeichnen wir mit $\bar{a}, \dots, \bar{f} \in \mathbf{C}$, so daß sich die zweite lineare Beziehung schreibt: $\sum \bar{a}a = 0$. Die Aufgabe dieses Abschnittes besteht nun darin, solche von P_1, \dots, P_6 abhängige Konstanten $\bar{a}, \dots, \bar{f} \in \mathbf{C}$ zu finden.

Fixieren wir zunächst die Koeffizienten bis auf einen Proportionalitätsfaktor durch die Forderung

$$\sum \bar{a} = 0. \quad (3.6)$$

Wir suchen nun eine weitere einschränkende Bedingung, die erstens \bar{a}, \dots, \bar{f} eindeutig bestimmt und durch die zweitens diese Koeffizienten eine möglichst einfache Darstellung erhalten.

Erinnern wir uns dazu an eine Eigenschaft der Pentaederform: stimmen zwei Koeffizienten überein, so existiert ein Eckardt – Punkt (S. 20). Übertragen auf die Ebene der 6 Punkte heißt dies, daß sich dort drei Geraden in einem Punkt schneiden. Die analoge Eigenschaft der Koeffizienten $\bar{a}, \dots, \bar{f} \in \mathbf{C}$ wäre also: $\bar{a} - \bar{b} = (ij, kl, mn)$ (Notation 3.1, S. 48) für gewisse paarweise verschiedene i, j, k, l, m, n . Im Hinblick auf die Tabelle (3.5) sind demnach die folgenden Bedingungen wünschenswert:

$$\begin{aligned} \bar{a} - \bar{b} &= (15, 24, 36), \\ \bar{a} - \bar{c} &= (14, 35, 26), \\ \bar{a} - \bar{d} &= (12, 43, 56), \\ \bar{a} - \bar{e} &= (23, 45, 16), \\ \bar{a} - \bar{f} &= (13, 52, 46), \\ \bar{b} - \bar{c} &= (25, 34, 16), \\ \bar{b} - \bar{d} &= (13, 54, 26), \\ \bar{b} - \bar{e} &= (12, 35, 46), \\ \bar{b} - \bar{f} &= (14, 23, 56), \\ \bar{c} - \bar{d} &= (15, 32, 46), \\ \bar{c} - \bar{e} &= (13, 24, 56), \\ \bar{c} - \bar{f} &= (12, 45, 36), \\ \bar{d} - \bar{e} &= (14, 52, 36), \\ \bar{d} - \bar{f} &= (24, 35, 16), \\ \bar{e} - \bar{f} &= (15, 34, 26). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Konsistenz dieses Systems von 15 Gleichungen ist aber keineswegs offensichtlich und muß daher im Folgenden überprüft werden. Bevor wir das erledigen sei aber noch kurz bemerkt, daß man aus diesen Bedingungen unter Benutzung von $\sum \bar{a} = 0$

sofort die \bar{a}, \dots, \bar{f} berechnen kann:

$$\begin{aligned}
 & (\bar{a} - \bar{b}) + (\bar{a} - \bar{c}) + (\bar{a} - \bar{d}) + (\bar{a} - \bar{e}) + (\bar{a} - \bar{f}) \\
 &= 5\bar{a} + \bar{a} - \bar{a} - \bar{b} - \bar{c} - \bar{d} - \bar{e} - \bar{f} \\
 &= 6\bar{a} - 0 \\
 &= 6\bar{a}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Insgesamt erhalten wir die zu der Übersicht der a, \dots, f auf Seite 56 analoge Tabelle:

Lemma 3.9 *Das Gleichungssystem (3.7) ist konsistent und für die durch (3.6) und (3.7) festgelegten und von den sechs Punkten P_1, \dots, P_6 abhängigen Koeffizienten $\bar{a}, \dots, \bar{f} \in \mathbf{C}$ gilt:*

$$\begin{aligned}
 6\bar{a} &= && + (15, 24, 36) + (14, 35, 26) + (12, 43, 56) + (23, 45, 16) + (13, 52, 46), \\
 6\bar{b} &= - (15, 24, 36) && + (25, 34, 16) + (13, 54, 26) + (12, 35, 46) + (14, 23, 56), \\
 6\bar{c} &= - (14, 35, 26) - (25, 34, 16) && + (15, 32, 46) + (13, 24, 56) + (12, 45, 36), \\
 6\bar{d} &= - (12, 43, 56) - (13, 54, 26) - (15, 32, 46) && + (14, 52, 36) + (24, 35, 16), \\
 6\bar{e} &= - (23, 45, 16) - (12, 35, 46) - (13, 24, 56) - (14, 52, 36) && + (15, 34, 26), \\
 6\bar{f} &= - (13, 52, 46) - (14, 23, 56) - (12, 45, 36) - (24, 35, 16) - (15, 34, 26).
 \end{aligned}$$

Beweis: Wir haben nur noch die Konsistenz des Systems (3.7) nachzuweisen, d.h. wir haben zu zeigen, daß überhaupt eine Lösung des Systems existiert. Aus den im Satz 3.2 auf Seite 48 aufgeführten Eigenschaften erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}
 0 &= (15, 24, 36) + (36, 24, 15) \\
 &= (153)(246) - (156)(243) + (361)(245) - \underbrace{(365)(241)}_{=-(142)(536)}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

und

$$\begin{aligned}
 0 &= (13, 25, 64) + (64, 25, 13) \\
 &= (136)(254) - (134)(256) + (641)(253) - (643)(251) \\
 &= -(361)(245) - (256)(341) - (146)(532) + (251)(346),
 \end{aligned}$$

und daraus durch Addition:

$$\begin{aligned}
 0 &= (153)(246) - (156)(243) + (251)(346) - (256)(341) \\
 &\quad + (142)(536) - (146)(532) \\
 &= (15, 24, 36) + (25, 34, 16) + (14, 53, 26) \\
 &= (\bar{a} - \bar{b}) + (\bar{b} - \bar{c}) + (\bar{c} - \bar{a}).
 \end{aligned}$$

Durch andere Ausgangsgleichungen (3.9) erhalten wir analoge Ergebnisse und können so die Konsistenz des gesamten Systems (3.7) nachweisen. \square

Da wir später mit den Koeffizienten arbeiten möchten, geben wir noch die Beziehungen zwischen den \bar{a}, \dots, \bar{f} an, die wir durch Subtraktion der beiden Gleichungen (3.9) erhalten:

$$\begin{aligned}
2(136)(245) &= -(135)(264) + (134)(265) + (165)(234) \\
&\quad - (164)(235) + (365)(124) - (364)(125) \\
&= (13, 26, 45) + (16, 23, 54) + (36, 12, 54) \\
&= (\bar{b} - \bar{d}) + (\bar{e} - \bar{a}) + (\bar{f} - \bar{c}) \\
&= -2(\bar{a} + \bar{c} + \bar{d}) = 2(\bar{b} + \bar{e} + \bar{f}).
\end{aligned}$$

Von anderen Gleichungen (3.9) ausgehend erhalten wir analoge Ergebnisse, die wir in folgendem Lemma zusammenfassen:

Lemma 3.10 *Für die in Lemma 3.9 beschriebenen, von den sechs Punkten P_1, \dots, P_6 abhängigen Koeffizienten $\bar{a}, \dots, \bar{f} \in \mathbf{C}$ gilt:*

$$\begin{aligned}
\bar{d} + \bar{e} + \bar{f} &= -(123)(456) = -(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}), \\
\bar{c} + \bar{e} + \bar{f} &= -(146)(253) = -(\bar{a} + \bar{b} + \bar{d}), \\
\bar{c} + \bar{d} + \bar{f} &= -(134)(265) = -(\bar{a} + \bar{b} + \bar{e}), \\
\bar{c} + \bar{d} + \bar{e} &= -(126)(345) = -(\bar{a} + \bar{b} + \bar{f}), \\
\bar{b} + \bar{e} + \bar{f} &= -(136)(254) = -(\bar{a} + \bar{c} + \bar{d}), \\
\bar{b} + \bar{d} + \bar{f} &= -(125)(436) = -(\bar{a} + \bar{c} + \bar{e}), \\
\bar{b} + \bar{d} + \bar{e} &= -(156)(234) = -(\bar{a} + \bar{c} + \bar{f}), \\
\bar{b} + \bar{c} + \bar{f} &= -(153)(246) = -(\bar{a} + \bar{d} + \bar{e}), \\
\bar{b} + \bar{c} + \bar{e} &= -(145)(326) = -(\bar{a} + \bar{d} + \bar{f}), \\
\bar{b} + \bar{c} + \bar{d} &= -(142)(356) = -(\bar{a} + \bar{e} + \bar{f}). \quad \square
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Aus der Analogie der Gleichungen der a, \dots, f (Lemma 3.7) und der \bar{a}, \dots, \bar{f} (Lemma 3.9) erkennen wir, daß unter einer Permutation der sechs Punkte, die a auf b abbildet, \bar{a} bis auf ein Vorzeichen auf \bar{b} geworfen wird. Da der Indikator (ij, kl, mn) bei Vertauschungen vom Typ (ij, mn, kl) das Vorzeichen wechselt im Gegensatz zum Produkt $(ijx)(klx)(mnx) = (ijx)(mnx)(klx)$, ändert sich das Vorzeichen der Koeffizienten auch bei ungeraden Permutationen nicht. Wir erhalten so:

Lemma 3.11 *Die in Lemma 3.9 beschriebenen, von den sechs Punkten P_1, \dots, P_6 abhängigen Koeffizienten $\bar{a}, \dots, \bar{f} \in \mathbf{C}$ werden in folgender Weise durch Permutationen der Punkte aufeinander abgebildet:*

$$\begin{aligned}
 \bar{a}^{(12)} &= \bar{d}, & \bar{b}^{(12)} &= \bar{e}, & \bar{c}^{(12)} &= \bar{f}, \\
 \bar{a}^{(13)} &= \bar{f}, & \bar{b}^{(13)} &= \bar{d}, & \bar{c}^{(13)} &= \bar{e}, \\
 \bar{a}^{(14)} &= \bar{c}, & \bar{b}^{(14)} &= \bar{f}, & \bar{d}^{(14)} &= \bar{e}, \\
 \bar{a}^{(15)} &= \bar{b}, & \bar{c}^{(15)} &= \bar{d}, & \bar{e}^{(15)} &= \bar{f}, \\
 \bar{a}^{(16)} &= \bar{e}, & \bar{b}^{(16)} &= \bar{c}, & \bar{d}^{(16)} &= \bar{f}, \\
 \bar{a}^{(23)} &= \bar{e}, & \bar{b}^{(23)} &= \bar{f}, & \bar{c}^{(23)} &= \bar{d}, \\
 \bar{a}^{(24)} &= \bar{b}, & \bar{c}^{(24)} &= \bar{e}, & \bar{d}^{(24)} &= \bar{f}, \\
 \bar{a}^{(25)} &= \bar{f}, & \bar{b}^{(25)} &= \bar{c}, & \bar{d}^{(25)} &= \bar{e}, \\
 \bar{a}^{(26)} &= \bar{c}, & \bar{b}^{(26)} &= \bar{d}, & \bar{e}^{(26)} &= \bar{f}, \\
 \bar{a}^{(34)} &= \bar{d}, & \bar{b}^{(34)} &= \bar{c}, & \bar{e}^{(34)} &= \bar{f}, \\
 \bar{a}^{(35)} &= \bar{c}, & \bar{b}^{(35)} &= \bar{e}, & \bar{d}^{(35)} &= \bar{f}, \\
 \bar{a}^{(36)} &= \bar{b}, & \bar{c}^{(36)} &= \bar{f}, & \bar{d}^{(36)} &= \bar{e}, \\
 \bar{a}^{(45)} &= \bar{e}, & \bar{b}^{(45)} &= \bar{d}, & \bar{c}^{(45)} &= \bar{f}, \\
 \bar{a}^{(46)} &= \bar{f}, & \bar{b}^{(46)} &= \bar{e}, & \bar{c}^{(46)} &= \bar{d}, \\
 \bar{a}^{(56)} &= \bar{d}, & \bar{b}^{(56)} &= \bar{f}, & \bar{c}^{(56)} &= \bar{e}. \quad \square
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Umgekehrt können wir von einer Permutation der \bar{a}, \dots, \bar{f} auf eine Vertauschung der Punkte P_1, \dots, P_6 schließen. Aus der Tabelle (3.11) ersehen wir beispielsweise, daß, falls \bar{a} und \bar{d} vertauscht sind, entweder die Punkte P_1 und P_2 , P_3 und P_4 oder P_5 und P_6 vertauscht worden sein müssen. Wegen der Analogie zwischen den Kubiken a, \dots, f und den Koeffizienten \bar{a}, \dots, \bar{f} können wir diese Beziehungen aus der Tabelle (3.5) ablesen.

Zuletzt müssen wir nun noch überprüfen, ob diese Koeffizienten die Bedingung $\sum \bar{a}a = 0$ erfüllen. Dies erledigen wir in folgendem Lemma:

Lemma 3.12 *Für die in Lemma 3.7 beschriebenen ebenen Kubiken $a, \dots, f \in \mathbf{C}[x, y, z]_3$ und die in Lemma 3.9 angegebenen Koeffizienten $\bar{a}, \dots, \bar{f} \in \mathbf{C}$ gilt:*

$$\sum \bar{a}a = 0.$$

Beweis: Die Kubik $C := \sum \bar{a}a \in \mathbf{C}[x, y, z]_3$ ändert bei Permutation der sechs Punkte höchstens ihr Vorzeichen. Wir haben nämlich gesehen, daß die Kubiken a, \dots, f genau unter ungeraden Permutationen ihr Vorzeichen wechseln und daß die Kubiken a, \dots, f und die Koeffizienten \bar{a}, \dots, \bar{f} analog permutiert werden (s. Tabellen in Lemma 3.4 und Lemma 3.11).

Wenn also ein Schnittpunkt zweier Geraden durch zwei der sechs Punkte, beispielsweise $P \in \mathbf{P}^2$ mit $(12P) = 0 = (34P)$, auf C liegt - $C(P) = 0$, so gilt dies vermöge Permutation der Punkte für alle Schnittpunkte zweier beliebiger Geraden

der Form (ijx) . Damit müssen aber auch alle 15 verschiedenen Verbindungsgeraden dieser Schnittpunkte auf C liegen; die Kubik C verschwindet also identisch (da eine Kurve vom Grad 3 höchstens aus drei Geraden bestehen kann).

Wir haben demnach nur noch nachzuweisen, daß der Schnittpunkt P der Geraden $(12x)$ und $(34x)$ auf C liegt. Für P gilt $(12P) = 0 = (34P)$ und somit (s. Tabelle (3.5)):

$$(a + d)(P) = (b + e)(P) = (c + f)(P) = (b + c)(P) = (e + f)(P) = 0.$$

Damit schreibt sich $C(P)$ unter Benutzung von $\sum \bar{a} = 0$:

$$\begin{aligned} C(P) &= (\bar{a} - \bar{d}) \cdot a(P) + (\bar{b} + \bar{f} - \bar{c} - \bar{e}) \cdot b(P) \\ &= (\bar{a} - \bar{d}) \cdot (a + b)(P) + (\bar{b} + \bar{f} + \bar{d} - \bar{a} - \bar{c} - \bar{e}) \cdot b(P). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (3.10) und (3.7) können wir dies umformen zu:

$$C(P) = (12, 43, 56) \cdot (a + b)(P) - 2 \cdot (125)(436) \cdot b(P).$$

Wir nutzen jetzt neben der Tabelle (3.5) und der Definition von b aus, daß der Wert der Geradengleichung (ijx) im Punkt P nach Satz 3.2 als $(12, 34, ij)$ geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} C(P) &= (12, 43, 56) \cdot 4 \cdot (12, 34, 51)(12, 34, 42)(12, 34, 36) \\ &\quad + 2 \cdot (125)(436) \cdot \begin{bmatrix} (12, 34, 53) & (12, 34, 12) & (12, 34, 46) \\ + (12, 34, 14) & (12, 34, 23) & (12, 34, 56) \\ + (12, 34, 25) & (12, 34, 34) & (12, 34, 16) \\ + (12, 34, 31) & (12, 34, 45) & (12, 34, 26) \\ + (12, 34, 42) & (12, 34, 51) & (12, 34, 36) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Da $(12, 34, 12) = 0 = (12, 34, 34)$ gilt, vereinfacht sich diese Darstellung schon ein wenig. Schreiben wir außer $(12, 43, 56)$ nun alle (ij, kl, mn) gemäß der Definition um, so erhalten wir, da bei Indikatoren mit zwei identischen Indizes nur ein Summand von null verschieden ist (beispielsweise $(12, 34, 51) = (125)(341) - (121)(345) = (125)(341)$), nach Ausklammern:

$$\begin{aligned} C(P) &= \overbrace{(125)(341)(124)(342)(123)(346)}^{k:=} \\ &\quad \cdot \left[4 \cdot (12, 43, 56) + 2 \cdot ((12, 34, 56) - (126)(345) + \underbrace{(512)(634)}_{=(125)(346)}) \right] \\ &= k \cdot [4 \cdot (12, 43, 56) + 2 \cdot 2 \cdot (12, 34, 56)] \\ &= k \cdot (4 \cdot (12, 43, 56) + 4 \cdot (12, 34, 56)) \\ &= k \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Wie oben erläutert, reicht dies aus, um zu beweisen, daß die Kubik C identisch verschwindet. \square

Damit die eben nachgewiesene Beziehung $\sum \bar{a}a = 0$ wirklich eine zweite, von $\sum a = 0$ verschiedene lineare Beziehung darstellt, benötigen wir noch das Lemma:

Lemma 3.13 *Liegen nicht fünf der sechs Punkte $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$ auf einer Geraden und keine Punkte unendlich nah beisammen, so sind die sechs Koeffizienten \bar{a}, \dots, \bar{f} , die wir mit Hilfe von Lemma 3.9 ausrechnen können, nicht alle gleich.*

Beweis: Dies ist offensichtlich; sogar wenn die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 auf einer Geraden liegen, schneiden sich oBdA. die Geraden $(15x)$, $(26x)$ und $(34x)$ nicht in einem Punkt, so daß die Übersicht (3.7) zeigt, daß $\bar{e} - \bar{f} = (15, 34, 26) \neq 0$. \square

3.2.3 Die Gleichung der Fläche im \mathbf{P}^3

In den beiden letzten Abschnitten haben wir, abhängig von den sechs Punkten $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$ allgemeiner Lage (also keine drei auf einer gemeinsamen Gerade und nicht alle sechs auf einer gemeinsamen Konik), Erzeuger $a, \dots, f \in \mathbf{C}[x, y, z]_3$ des Linearsystems aller Kubiken durch die sechs Punkte und Koeffizienten $\bar{a}, \dots, \bar{f} \in \mathbf{C}$ gefunden, die alle zu Beginn des Kapitels geforderten Bedingungen erfüllen:

- In Lemma 3.7 bzw. 3.9 haben wir Gleichungen aufgestellt, mit Hilfe derer wir die a, \dots, f bzw. die \bar{a}, \dots, \bar{f} direkt aus den Koordinaten der Punkte P_1, \dots, P_6 ausrechnen können, indem wir Determinanten der Form $(12x)$ bzw. $(12, 34, 56)$ berechnen.
- Die Lemmata 3.4 bzw. 3.11 zeigen, daß unter Permutationen der Punkte P_1, \dots, P_6 die Kubik a auf b oder $-b$ abgebildet wird genau wenn \bar{a} auf \bar{b} geworfen wird etc. Diese Lemmata zeigen auch, daß die a, \dots, f bzw. die \bar{a}, \dots, \bar{f} unter Punkt-Permutationen nur untereinander permutiert werden.
- In den Lemmata 3.6, 3.8 und 3.12 werden die Beziehungen

$$\sum a^3 = 0, \quad \sum a = 0 \quad \text{und} \quad \sum \bar{a}a = 0$$

bewiesen und $\sum \bar{a} = 0$ hatten wir in (3.6) als einschränkende Bedingung für die Koeffizienten gewählt.

- Nach Lemma 3.13 sind die beiden linearen Gleichungen $\sum a = 0$ und $\sum \bar{a}a = 0$ tatsächlich verschieden, wenn die sechs Punkte in allgemeiner Lage sind.

Fassen wir nun die Buchstaben a, \dots, f nicht als ebene Kubiken, sondern als Koordinaten $(a : \dots : f)$ des \mathbf{P}^5 auf, so erhalten wir die gesuchte Gleichung der kubischen Fläche:

Satz 3.14 (Die Coblesche Hexaederform)

Seien $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$ sechs Punkte der projektiven Ebene in allgemeiner Lage (d.h. keine drei auf einer gemeinsamen Geraden und nicht alle sechs auf einer gemeinsamen Konik). Dann existieren davon abhängige Konstanten $\bar{a}, \dots, \bar{f} \in \mathbf{C}$ (gegeben durch Lemma 3.9), so daß die kubische Fläche, gegeben in den Koordinaten $(a : \dots : f)$ des \mathbf{P}^5 in der sogenannten Cobleschen Hexaederform durch die Gleichung

$$\sum a^3 = 0,$$

mit Hilfe der beiden linearen Gleichungen

$$\sum a = 0 \text{ und } \sum \bar{a}a = 0$$

in den \mathbf{P}^3 eingebettet werden kann. Dies ist genau die kubische Fläche, die wir in Satz 1.18 durch Aufblasen des \mathbf{P}^2 in den sechs Punkten P_1, \dots, P_6 erhalten haben.

Beweis: Wegen der zuvor aufgezählten Eigenschaften bleibt nur noch zu zeigen, daß die beiden kubischen Flächen identisch sind.

Wir benutzen hierzu die Gleichung der kubischen Fläche im \mathbf{P}^3 , die wir mit Hilfe der beiden linearen Gleichungen berechnen können. Seien also oBdA. die Koeffizienten $\bar{e} \neq \bar{f}$ verschieden. Lösen wir die beiden linearen Gleichungen jeweils nach den Variablen e bzw. f auf und setzen diese dann in die Kubik ein, so ergibt sich $e = -(a + b + c + d + f)$ und daraus mit $\sum \bar{a}a = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{f}f &= -(\bar{a}a + \dots + \bar{d}d - \bar{e}(a + \dots + d + f)) \\ &= -(\bar{a}a + \dots + \bar{d}d - \bar{e}a - \dots - \bar{e}d - \bar{e}f) \\ &= -\bar{a}a - \dots - \bar{d}d + \bar{e}a + \dots + \bar{e}d + \bar{e}f. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Schließlich ergibt sich für e bzw. f :

$$\begin{aligned} f &= \frac{\bar{e}-\bar{a}}{\bar{f}-\bar{e}} a + \dots + \frac{\bar{e}-\bar{d}}{\bar{f}-\bar{e}} d \\ e &= -\left(a + b + c + d + \frac{\bar{e}-\bar{a}}{\bar{f}-\bar{e}} a + \dots + \frac{\bar{e}-\bar{d}}{\bar{f}-\bar{e}} d\right) \\ &= \left(\frac{\bar{a}-\bar{e}}{\bar{f}-\bar{e}} - 1\right) a + \dots + \left(\frac{\bar{d}-\bar{e}}{\bar{f}-\bar{e}} - 1\right) d, \end{aligned} \quad (3.13)$$

so daß die Gleichung der kubischen Fläche im \mathbf{P}^3 in den Koordinaten $(a : \dots : d)$ lautet:

$$\begin{aligned} F_{Coble} := \{a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \left(\frac{\bar{e}-\bar{a}}{\bar{f}-\bar{e}} a + \dots + \frac{\bar{e}-\bar{d}}{\bar{f}-\bar{e}} d\right)^3 \\ + \left(\left(\frac{\bar{a}-\bar{e}}{\bar{f}-\bar{e}} - 1\right) a + \dots + \left(\frac{\bar{d}-\bar{e}}{\bar{f}-\bar{e}} - 1\right) d\right)^3 = 0\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Betrachten wir nun die kubische Fläche, die wir durch Aufblasen erhalten (s. Satz 1.18), also

$$F_{Blow-Up} := \overline{\{(a(x) : b(x) : c(x) : d(x)) \mid x \in \mathbf{P}^2\}} \subset \mathbf{P}^3,$$

wobei a, b, c, d hier wieder die ebenen Kubiken darstellen, die eine Basis des Liniensystems durch die sechs Punkte bilden. Wegen der Gleichung $\sum a^3 = 0$ (also $a(x)^3 + \dots + f(x)^3 = 0 \forall x \in \mathbf{P}^2$), die für die Kubiken a, \dots, f gilt, haben wir sofort, da F_{Coble} abgeschlossen ist: $F_{Blow-Up} \subset F_{Coble}$. Die kubische Fläche $F_{Blow-Up}$ ist aber glatt und enthält keine mehrfachen Komponenten; die beiden kubischen Flächen F_{Coble} und $F_{Blow-Up}$ müssen daher identisch sein. Liegen entweder drei der sechs Punkte P_1, \dots, P_6 auf einer gemeinsamen Geraden oder alle sechs auf einer gemeinsamen Konik, so hat $F_{Blow-Up}$ ebenfalls keine mehrfachen Komponenten ($F_{Blow-Up}$ hat nämlich nur isolierte gewöhnliche Doppelpunkte, s. Abschnitt 4.2 auf Seite 76) und es gilt ebenfalls: $F_{Blow-Up} = F_{Coble}$. \square

Die im Beweis von Satz 3.14 ausgeführten Rechnungen zeigen, daß wir, wenn wir setzen $k_i := \frac{\bar{e}-\bar{i}}{\bar{f}-\bar{e}} \forall i \in I := \{a, b, c, d\}$, die Gleichung der kubischen Fläche im \mathbf{P}^3 mit den Koordinaten $(a : b : c : d)$ schreiben können:

$$\sum_{i \in I} i^3 + \left(\sum_{i \in I} (-k_i - 1) i \right)^3 + \left(\sum_{i \in I} k_i i \right)^3. \quad (3.15)$$

Möchten wir uns die Fläche allerdings ansehen, benötigen wir eine affine Gleichung in 3 Variablen; dazu kommen wir im Abschnitt 3.4 ab Seite 71.

3.3 Die Tritangentialebenen und die Geraden

Tritangentialebenen sind Ebenen im \mathbf{P}^3 , die die kubische Fläche in genau 3 Geraden schneiden. Im Allgemeinen schneidet eine Ebene aus der kubischen Fläche (im Folgenden mit S bezeichnet) eine ebene Kubik heraus - im Fall von Tritangentialebenen besteht diese Kubik aus drei Geraden.

Fixiert man eine Doppel-Sechs-Konfiguration (s. Abschnitt 2.2.2), benennt deren Geraden entsprechend a_i und $b_i, i = 1, 2, \dots, 6$ und die anderen 15 Geraden mit $c_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, 6, i < j$, so gibt es 15 Tritangentialebenen, die jeweils drei Geraden vom Typ c_{ij} und 30 Tritangentialebenen, die jeweils eine Gerade a_i, b_j und c_{ij} aus der Kubik schneiden (ausführlich werden diese Zusammenhänge im Kapitel 2, S. 31, dargestellt). Im Folgenden werden wir die Gleichungen der insgesamt 45 Tritangentialebenen berechnen, in Abhängigkeit zunächst von den sechs Punkten und dann von den sechs Koeffizienten \bar{a}, \dots, \bar{f} der Hexaederform.

Der Übersichtlichkeit wegen werden wir immer im \mathbf{P}^5 mit den Koordinaten $(a : \dots : f)$ und nicht im \mathbf{P}^3 arbeiten. Die Buchstaben a, \dots, f werden aber auch weiterhin manchmal Kubiken im \mathbf{P}^2 darstellen; es ist (hoffentlich) immer klar, wann eine Gleichung in den Koordinaten $(x : y : z)$ des \mathbf{P}^2 und wann eine Gleichung in den Koordinaten $(a : \dots : f)$ des \mathbf{P}^5 vorliegt.

Die ersten 15 Ebenen und Geraden

Aus den 15 Beziehungen in (3.5) ergeben sich sofort die Gleichungen der ersten 15 Tritangentialebenen und Geraden. Jede Gerade $(ijx) \subset \mathbf{P}^2$ wird nämlich auf eine Gerade $c_{ij} \subset \mathbf{P}^3$ der kubischen Fläche S abgebildet. Somit ist das Bild c_{12} der ebenen Geraden $(12x) = \{a + d = 0\} \cap \{b + e = 0\} \cap \{c + f = 0\}$ komplett in S enthalten und ist die Gerade, die durch den Schnitt der Ebenen $\{a + d = 0\}$, $\{b + e = 0\}$ und $\{c + f = 0\}$ gegeben ist. Entsprechendes gilt natürlich für die anderen Geraden (mit Hilfe von (3.5):

Satz 3.15 (Die ersten 15 Geraden und Tritangentialebenen)

Bezeichnen c_{ij} die 15 Geraden der kubischen Fläche S in Doppel-Sechs-Notation und sind $(a : \dots : f)$ die Koordinaten des \mathbf{P}^5 , so sind die c_{ij} der Schnitt jeweils dreier Ebenen.

$$\begin{aligned}
 c_{12} &= \{a + d = 0\} \cap \{b + e = 0\} \cap \{c + f = 0\} \\
 c_{13} &= \{a + f = 0\} \cap \{b + d = 0\} \cap \{c + e = 0\} \\
 c_{14} &= \{a + c = 0\} \cap \{b + f = 0\} \cap \{d + e = 0\} \\
 c_{15} &= \{a + b = 0\} \cap \{c + d = 0\} \cap \{e + f = 0\} \\
 c_{16} &= \{a + e = 0\} \cap \{b + c = 0\} \cap \{d + f = 0\} \\
 c_{23} &= \{a + e = 0\} \cap \{b + f = 0\} \cap \{c + d = 0\} \\
 c_{24} &= \{a + b = 0\} \cap \{c + e = 0\} \cap \{d + f = 0\} \\
 c_{25} &= \{a + f = 0\} \cap \{b + c = 0\} \cap \{d + e = 0\} \\
 c_{26} &= \{a + c = 0\} \cap \{b + d = 0\} \cap \{e + f = 0\} \\
 c_{34} &= \{a + d = 0\} \cap \{b + c = 0\} \cap \{e + f = 0\} \\
 c_{35} &= \{a + c = 0\} \cap \{b + e = 0\} \cap \{d + f = 0\} \\
 c_{36} &= \{a + b = 0\} \cap \{c + f = 0\} \cap \{d + e = 0\} \\
 c_{45} &= \{a + e = 0\} \cap \{b + d = 0\} \cap \{c + f = 0\} \\
 c_{46} &= \{a + f = 0\} \cap \{b + e = 0\} \cap \{c + d = 0\} \\
 c_{56} &= \{a + d = 0\} \cap \{b + f = 0\} \cap \{c + e = 0\}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Umgekehrt sieht man aus dieser Tabelle, daß die 15 Ebenen der Form $\{a + b = 0\}$ Tritangentialebenen sind, da sie jeweils genau drei der c_{ij} aus der kubischen Fläche S schneiden. \square

Aus der obigen Tabelle kann man zwar auch ablesen, welche Ebene welche Geraden aus der Kubik S herauschneidet; allerdings ist dies aus der Übersicht (3.5) auf Seite 55 direkter zu sehen, die die entsprechenden Verhältnisse in der Ebene zusammenfaßt.

Die restlichen Gleichungen, ausgehend von den 6 Punkten

Durch jede Gerade c_{ij} auf S gehen genau fünf Tritangentialebenen (Lemma 2.2, S. 32), von denen eben in (3.16) erst drei angegeben wurden. Die verbleibenden zwei sind die Ebenen, die vom Bild jeweils einer Konik und c_{ij} aufgespannt werden (Satz 1.21 und 1.22). Für die Gerade $(12x)$ sind das die beiden Koniken (jeweils eindeutigen) durch die Punkte P_1, P_3, P_4, P_5, P_6 sowie durch die Punkte P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 . Um nun aber die Gleichungen dieser Tritangentialebenen zu bestimmen, versuchen wir, die Gleichung der entsprechenden Kubik $(12x)(13456x^2)$ in der Ebene durch die Kubiken a, \dots, f auszudrücken. Wie wir schon im Beweis zu Satz 1.13 gesehen haben, läßt sie sich mittels $(a + d)$ und $(b + e)$ linear kombinieren. Lassen wir die fixe Gerade $(12x)$ außen vor, suchen wir Konstanten k_1 und k_2 , so daß

$$(k_1(34x)(56x) + k_2(53x)(46x)) = (13456x^2).$$

Da die rechte Seite der Gleichung, ausgewertet im Punkt P_1 , 0 ergibt, muß dies für die linke Seite auch gelten. Das liefert:

$$k_1(341)(561) = -k_2(531)(461).$$

Eine möglich Wahl für k_1 und k_2 ist somit

$$\begin{aligned} k_1 &= (531)(461) \\ k_2 &= -(341)(561), \end{aligned} \tag{3.17}$$

da $(531)(461)(34x)(56x) - (341)(561)(53x)(46x)$ bis auf einen konstanten Faktor ebenso die eindeutige Konik durch die Punkte P_1, \dots, P_6 ist wie $(13456x^2)$. Entsprechendes gilt für die zweite Konik, so daß wir folgende Gleichungen der ebenen Kubiken und damit der Tritangentialebenen erhalten:

$$\begin{aligned} \{(531)(461)(a + d) - (341)(561)(b + e) &= 0\}, \\ \{(532)(462)(a + d) - (342)(562)(b + e) &= 0\}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Analog geht man vor, um die jeweils zwei noch fehlenden Tritangentialebenen durch die anderen Geraden zu finden:

Satz 3.16 (Die weiteren 30 Tritangentialebenen)

Bezeichnen wir mit $E(c_{ij}, a_i, b_j)$ die durch die Geraden c_{ij} , a_i und b_j aufgespannte Tritangentialebene der kubischen Fläche S , so können wir die 30 Tritangentialebenen in den Koordinaten $(a : \dots : f)$ des \mathbf{P}^5 , abhängig von den sechs Punkten $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$ folgendermaßen aufschreiben ((ijk) bezeichnet weiterhin die in Abschnitt 3.1 eingeführte Determinante der aus den Punkt – Koordinaten beste-

henden Matrix):

$$\begin{aligned}
E(c_{12}, a_1, b_2) &= \{(531)(461)(a+d) - (341)(561)(b+e) = 0\}, \\
E(c_{12}, a_2, b_1) &= \{(532)(462)(a+d) - (342)(562)(b+e) = 0\}, \\
E(c_{13}, a_1, b_3) &= \{(541)(261)(a+f) - (251)(461)(b+d) = 0\}, \\
E(c_{13}, a_2, b_1) &= \{(543)(263)(a+f) - (253)(463)(b+d) = 0\}, \\
E(c_{14}, a_1, b_4) &= \{(231)(561)(a+c) - (351)(261)(b+f) = 0\}, \\
E(c_{14}, a_2, b_1) &= \{(234)(564)(a+c) - (354)(264)(b+f) = 0\}, \\
E(c_{15}, a_1, b_5) &= \{(321)(461)(a+b) - (241)(361)(c+d) = 0\}, \\
E(c_{15}, a_2, b_1) &= \{(325)(465)(a+b) - (245)(365)(c+d) = 0\}, \\
E(c_{16}, a_1, b_6) &= \{(341)(251)(a+e) - (321)(541)(b+c) = 0\}, \\
E(c_{16}, a_2, b_1) &= \{(346)(256)(a+e) - (326)(546)(b+c) = 0\}, \\
E(c_{23}, a_2, b_3) &= \{(142)(562)(a+e) - (452)(162)(b+f) = 0\}, \\
E(c_{23}, a_3, b_2) &= \{(143)(563)(a+e) - (453)(163)(b+f) = 0\}, \\
E(c_{24}, a_2, b_4) &= \{(312)(562)(a+b) - (152)(362)(c+e) = 0\}, \\
E(c_{24}, a_4, b_2) &= \{(314)(564)(a+b) - (154)(364)(c+e) = 0\}, \\
E(c_{25}, a_2, b_5) &= \{(342)(162)(a+f) - (132)(462)(b+c) = 0\}, \\
E(c_{25}, a_5, b_2) &= \{(345)(165)(a+f) - (135)(465)(b+c) = 0\}, \\
E(c_{26}, a_2, b_6) &= \{(312)(452)(a+c) - (532)(412)(b+d) = 0\}, \\
E(c_{26}, a_6, b_2) &= \{(316)(456)(a+c) - (536)(416)(b+d) = 0\}, \\
E(c_{34}, a_3, b_4) &= \{(253)(163)(a+d) - (123)(563)(b+c) = 0\}, \\
E(c_{34}, a_4, b_3) &= \{(254)(164)(a+d) - (124)(564)(b+c) = 0\}, \\
E(c_{35}, a_3, b_5) &= \{(213)(463)(a+c) - (143)(263)(b+e) = 0\}, \\
E(c_{35}, a_5, b_3) &= \{(215)(465)(a+c) - (145)(265)(b+e) = 0\}, \\
E(c_{36}, a_3, b_6) &= \{(543)(213)(a+b) - (513)(423)(c+f) = 0\}, \\
E(c_{36}, a_6, b_3) &= \{(546)(216)(a+b) - (516)(426)(c+f) = 0\}, \\
E(c_{45}, a_4, b_5) &= \{(314)(264)(a+e) - (234)(164)(b+d) = 0\}, \\
E(c_{45}, a_5, b_4) &= \{(315)(265)(a+e) - (235)(165)(b+d) = 0\}, \\
E(c_{46}, a_4, b_6) &= \{(124)(534)(a+f) - (254)(134)(b+e) = 0\}, \\
E(c_{46}, a_6, b_4) &= \{(126)(536)(a+f) - (256)(136)(b+e) = 0\}, \\
E(c_{56}, a_5, b_6) &= \{(235)(145)(a+d) - (435)(215)(b+f) = 0\}, \\
E(c_{56}, a_6, b_5) &= \{(236)(146)(a+d) - (436)(216)(b+f) = 0\}. \quad \square
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Korollar 3.17 (Die 45 Tritangentialebenen)

Nach Satz 3.15 und Satz 3.16 gibt es 15 Tritangentialebenen vom Typ $a+b=0$, die jeweils drei Geraden vom Typ c_{ij} aus der kubischen Fläche schneiden und 30 Tritangentialebenen vom Typ $(321)(461)(a+b) - (241)(361)(c+d) = 0$, die jeweils eine Gerade c_{ij} , eine exzeptionelle Gerade a_i und eine einer ebenen Konik zugehörige Gerade b_j aus der kubischen Fläche schneiden.

Korollar 3.18 (Die 27 Geraden)

Nach Satz 3.16 erhalten wir die exzeptionelle Gerade a_i , indem wir zwei beliebige Indizes $j, k \in \{1, 2, \dots, 6\} \setminus \{i\}$, $j \neq k$, wählen und die Ebenen schneiden, die durch c_{ij} , a_i , b_j bzw. c_{ik} , a_i , b_k aufgespannt werden. Entsprechendes gilt für die zu den sechs Koniken durch jeweils fünf Punkte gehörenden Geraden b_j der kubischen

Fläche. Wie wir ebenfalls aus der Tabelle (3.19) ersehen, können wir aus den dort angegebenen 30 Tritangentialebenen auch die Geraden c_{ij} erhalten, indem wir jeweils zwei aufeinanderfolgende Ebenen miteinander schneiden.

Korollar 3.19

Haben die Punkte $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$ nur reelle Koordinaten, so sehen wir aus den Gleichungen der Tritangentialebenen sofort, daß diese und daher auch alle Geraden ebenfalls reell sind.

Da beim *Cubic Surface Program* die Punkte in der reell-affinen Ebene liegen, können damit also nur kubische Flächen visualisiert werden, deren 27 Geraden alle reell sind. Insbesondere erhalten wir damit also nicht die in Abbildung 1.3 auf Seite 1.3 dargestellte kubische Fläche, die topologisch gesehen aus zwei Komponenten besteht und auf der nur drei reelle Geraden liegen. Leider hatte ich keine Zeit, das Programm dahingehend zu ändern, daß es auch komplexe Koeffizienten akzeptiert — dies wäre zumindest für eine Version sinnvoll, die nicht einfach die Maus – Koordinaten als Koordinaten verwendet.

In [Sch, 1858, S. 214 in den Ges. Abh.] klassifiziert Schläfli die kubischen Flächen mit reellen Koeffizienten nach der Anzahl der auf ihr befindlichen reellen Geraden. Demnach gibt es die folgenden fünf Typen:

- Alle 27 Geraden und alle 45 Tritangentialebenen sind reell.
- 15 Geraden und 15 Ebenen sind reell.
- Sieben Geraden und fünf Ebenen sind reell.
- Drei Geraden und 13 Ebenen sind reell.
- Drei Geraden und sieben Ebenen sind reell.

Die Gleichungen, ausgehend von den 6 Koeffizienten

Wir haben eben die Gleichungen aller 27 Geraden, ausgehend von 6 Punkten des \mathbf{P}^2 , bestimmt. Haben wir aber keine sechs Punkte gegeben, sondern die Gleichung einer kubischen Fläche in Hexaderform, sind also 6 Koeffizienten \bar{a}, \dots, \bar{f} gegeben, so können wir die Gleichungen der Tritangentialebenen ebenfalls direkt angeben.

Hierzu müssen wir allerdings noch etwas Vorarbeit leisten. Ein natürlicher Ansatz ist es, die in (3.19) auftretenden Vorfaktoren durch die 6 Koeffizienten auszudrücken. Betrachten wir also nochmals die beiden Kubiken, die sich in der Geraden $(12x)$ schneiden:

$$\begin{aligned} (531)(461)(a+d) - (341)(561)(b+e) &= 0, \\ (532)(462)(a+d) - (342)(562)(b+e) &= 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Da wir Produkte der Form $(ijm)(kln)$ mittels \bar{a}, \dots, \bar{f} darstellen können (s. (3.10) S. 59), multiplizieren wir die beiden Gleichungen miteinander und erhalten:

$$\begin{aligned}
 0 &= (a+d)^2 \left((531)(462) \cdot (532)(461) \right) \\
 &\quad + (b+e)^2 \left((341)(562) \cdot (342)(561) \right) \\
 &\quad - (a+d)(b+e) \left((531)(462) \cdot (341)(562) \right. \\
 &\quad \quad \left. + (532)(461) \cdot (342)(561) + (563)(142) \cdot (512)(436) \right).
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Mittels der angesprochenen Tabelle (3.10) können wir die Determinanten-Produkte nun umschreiben. Wir betrachten zunächst aber nur den zu $(a+d)(b+e)$ gehörigen Vorfaktor:

$$(\bar{b} + \bar{c} + \bar{f})(\bar{d} + \bar{e} + \bar{f}) - (\bar{c} + \bar{e} + \bar{f})(\bar{b} + \bar{d} + \bar{e}) - (\bar{b} + \bar{c} + \bar{d})(\bar{b} + \bar{d} + \bar{f}).$$

Es fällt auf, daß diese Darstellung symmetrisch in \bar{c} und \bar{f} ist. Multiplizieren wir aus, so ergibt sich unter Benutzung von $\sum \bar{a} = 0$:

$$\overline{cf} := a_2 + 2(\bar{c}^2 + \bar{f}^2 + \bar{c}\bar{f}), \tag{3.22}$$

wobei $a_2 := \sum \bar{a}\bar{b}$ die im Abschnitt 3.1 (S. 49) eingeführte Summe über alle möglichen Produkte bezeichnet. Schreiben wir jetzt auch die anderen Determinanten in (3.21) entsprechend der Tabelle (3.10) um, nutzen $c+f = -(a+d) - (b+e)$ (daraus folgt: $(c+f)^2 = (a+d)^2 + 2(a+d)(b+e) + (b+e)^2$) aus und definieren \overline{ad} und \overline{be} entsprechend (3.22), so finden wir schließlich:

$$\overline{ad}(a+d)^2 + \overline{be}(b+e)^2 + \overline{cf}(c+f)^2 = 0. \tag{3.23}$$

Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung können auf drei äquivalente Weisen geschrieben werden, je nachdem, nach welcher der drei Summen $(a+d)$, $(b+e)$ oder $(c+f)$ wir auflösen (nachdem wir eine der anderen Summen wieder vermöge $\sum \bar{a} = 0$ umgeschrieben haben):

$$\begin{aligned}
 (\overline{be} - d_2)(b+e) - (\overline{cf} + d_2)(c+f) &= 0, \\
 (\overline{cf} - d_2)(c+f) - (\overline{ad} + d_2)(a+d) &= 0, \\
 (\overline{ad} - d_2)(a+d) - (\overline{be} + d_2)(b+e) &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

wobei

$$d_2^2 = -\overline{be}\overline{cf} - \overline{cf}\overline{ad} - \overline{ad}\overline{be}. \tag{3.25}$$

Die beiden Tritangentialebenen stimmen also überein, wenn $d_2 = 0$ gilt. In diesem Fall müssen demnach die beiden Koniken durch die Punkte 1, 3, 4, 5, 6 bzw. 2, 3, 4, 5, 6 übereinstimmen und die 6 Punkte auf einer Konik liegen. Dies muß aber eine in den 6 Punkten symmetrische Bedingung sein; da außerdem d_2^2 nur aus Termen vom Grad 4 in \bar{a}, \dots, \bar{f} besteht, müssen wir d_2^2 schreiben können als $d_2^2 = \lambda a_2^2 + \mu a_4$ für gewisse Konstanten λ, μ . Hier ist, ähnlich a_2 , a_4 definiert als

$a_4 := \sum \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$, also als Summe über alle möglichen Produkte aus 4 verschiedenen Koeffizienten. Multiplizieren wir aus, so finden wir schließlich:

$$d_2^2 = a_2^2 - 4a_4. \quad (3.26)$$

Wir haben in (3.24) zwar schon alle 30 Tritangentialebenen vom Typ $\nu(a+d) - \omega(b+e)$ alleine durch die Koeffizienten \bar{a}, \dots, \bar{f} dargestellt. Allerdings ist das Vorzeichen von d_2 in (3.24) noch nicht eindeutig bestimmt. Um dieses festzulegen, ziehen wir die andere Bedingung dafür, daß die 6 Punkte auf einer Konik liegen, zu Rate:

$$d_2' = \det \begin{pmatrix} (531)(461) & (341)(561) \\ (532)(462) & (342)(562) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.27)$$

Die beiden Kubiken in (3.20) sind nämlich identisch, wenn die Determinante des Gleichungssystems 0 wird. Da aber beide Kubiken die Gerade $(12x)$ als Faktor beinhalten, müssen auch die Koniken übereinstimmen. Wir haben also: $kd_2 = d_2' = (531)(461) \cdot (342)(562) - (341)(561) \cdot (532)(462)$ für eine Konstante k . Benutzen wir nun wieder $(c+f)^2 = (a+d)^2 + 2(a+d)(b+e) + (b+e)^2$, können wir (3.23) umschreiben zu

$$(a+d)^2(\bar{a}\bar{d} - \bar{c}\bar{f}) + (b+e)^2(\bar{b}\bar{e} - \bar{c}\bar{f}) - 2(a+d)(b+e)\bar{c}\bar{f} = 0.$$

Vergleichen wir dies nun mit (3.21), so finden wir zunächst

$$\begin{aligned} \frac{\bar{a}\bar{d} - \bar{c}\bar{f}}{2} &= (531)(461) \cdot (532)(462), \\ \frac{\bar{b}\bar{e} - \bar{c}\bar{f}}{2} &= (341)(561) \cdot (342)(562), \\ \bar{c}\bar{f} &= (531)(461) \cdot (342)(562) + (532)(462) \cdot (341)(561) \end{aligned} \quad (3.28)$$

und schließlich: $k^2 d_2^2 = -\bar{b}\bar{e}\bar{c}\bar{f} - \bar{c}\bar{f}\bar{a}\bar{d} - \bar{a}\bar{d}\bar{b}\bar{e}$. Wegen (3.25) wählen wir $k = 1$ und erhalten so aus (3.24) mit 3.28 die erste der beiden Ebenen aus (3.20). Wir haben also gezeigt:

Satz 3.20 (Die 30 Tritangentialebenen, abhängig von \bar{a}, \dots, \bar{f})

Sind $\bar{a}\bar{d}, \bar{b}\bar{e}$ und $\bar{c}\bar{f}$ definiert wie in (3.22),

$$\bar{c}\bar{f} := a_2 + 2(\bar{c}^2 + \bar{f}^2 + \bar{c}\bar{f}) \text{ etc.},$$

und ist d_2^2 definiert wie in (3.26),

$$d_2^2 = a_2^2 - 4a_4,$$

so können wir die erste der $2 \cdot 15$ Tritangentialebenen aus Satz 3.16 in den drei äquivalenten, nur von den Koeffizienten $\bar{a}, \dots, \bar{f} \in \mathbf{C}$ abhängigen, Darstellungen angeben:

$$\begin{aligned} (\bar{b}\bar{e} - d_2)(b+e) - (\bar{c}\bar{f} + d_2)(c+f) &= 0 \Leftrightarrow \\ (\bar{c}\bar{f} - d_2)(c+f) - (\bar{a}\bar{d} + d_2)(a+d) &= 0 \Leftrightarrow \\ (\bar{a}\bar{d} - d_2)(a+d) - (\bar{b}\bar{e} + d_2)(b+e) &= 0. \end{aligned}$$

Wählen wir das Vorzeichen von d_2 gemäß

$$d_2 = \det \begin{pmatrix} (531)(461) & (341)(561) \\ (532)(462) & (342)(562) \end{pmatrix},$$

so erhalten wir dadurch die erste der beiden Ebenen. Die weiteren Tritangentialebenen ergeben sich durch Permutation der a, \dots, f und \bar{a}, \dots, \bar{f} aus diesen Gleichungen, wobei bei einer ungeraden Permutation das Vorzeichen von d_2 geändert werden muß.

3.4 Affine Darstellungen

In den vorangehenden Abschnitten haben wir explizite Gleichungen für die kubische Fläche, deren 45 Tritangentialebenen und deren 27 Geraden im \mathbf{P}^3 gegeben. Da wir uns dies alles aber auch anschauen möchten, benötigen wir Darstellungen im affinen 3-Raum. Wir müssen uns also entscheiden, welche Ebene die Rolle der unendlich fernen Ebene übernehmen soll.

Benennen wir die Koordinaten des \mathbf{P}^3 mit $(x : y : z : w)$, so können wir als solche beispielsweise die Ebene $\{w = 0\}$ wählen. Um diese Ebene zur unendlich Fernen zu machen, setzen wir in allen Gleichungen $w := 1$.

Wir suchen aber eine affine Darstellung, in der die Diagonalfäche von Clebsch $\mathcal{C} := \{x^3 + y^3 + z^3 + w^3 + u^3 = 0, u := -(x + y + z + w)\}$ als Spezialfall einer glatten Fläche — und besser auch die Cayley Kubik als Fläche mit vier Doppelpunkten — möglichst *gut* erscheint. Damit ist insbesondere gemeint, daß alle 27 Geraden auf dieser Fläche zu sehen sein sollen und die gesamte Fläche sehr regelmäßig erscheinen soll. Für die gerade angesprochene Ebene $\{w = 0\}$ ist dies nicht gegeben, da die drei Geraden (s. Abschnitt 1.2 über die Pentaederform) $l_1 := \{x + y = 0\} \cap \{z + u = 0\}$, $l_2 := \{x + u = 0\} \cap \{y + z = 0\}$ und $l_3 := \{x + z = 0\} \cap \{y + u = 0\}$ in dieser Ebene und daher im unendlich Fernen liegen; es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \{w = 1\} \cap \mathcal{C} \cap l_1 &= \{w = 1\} \cap \{x^3 + y^3 + z^3 + w^3 + u^3 = 0\} \cap l_1 \\ &= \{x^3 + y^3 + z^3 + 1 + u^3 = 0\} \cap \{x + y = 0\} \cap \{z + u = 0\} \\ &= \{x^3 + y^3 + z^3 + 1^3 + u^3 = 0\} \cap \{x = -y\} \cap \{z = -u\} \\ &= \{-y^3 + y^3 - u^3 + 1^3 + u^3 = 0\} \\ &= \{1 = 0\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Die traditionelle Wahl ist eine Substitution der Art $w := 2(1 - x - y - z)$, so daß die unendlich ferne Ebene von der Form $\{\frac{1}{2}w + x + y + z = 0\}$ ist (s. Abb. 3.5). In dieser Ebene liegen die drei Eckardt - Punkte $(1 : -1 : 0 : 0 : 0)$, $(1 : 0 : -1 : 0 : 0)$ und $(0 : 1 : -1 : 0 : 0)$ — im Bild sind also drei Mal jeweils drei Geraden parallel, da sie sich in einem dieser unendlich fernen Eckardt-Punkte treffen. In der affinen Darstellung liegen somit zwar nicht alle Eckardt - Punkte im Endlichen, dafür

aber alle Geraden und durch die im Bild gut zu erkennende Parallelität der sich in den Eckardt – Punkten treffenden Geraden sind doch wieder alle diese Punkte sichtbar.

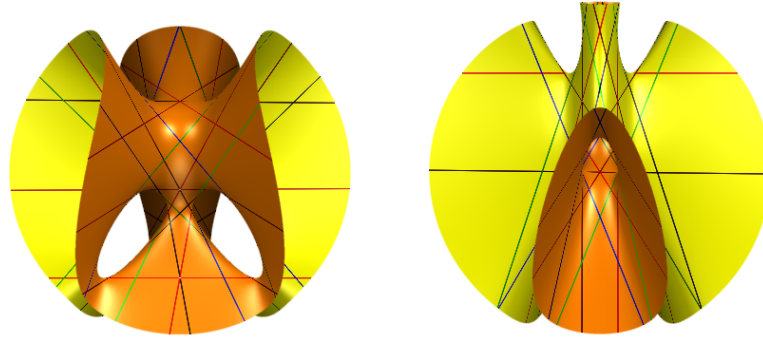


Abbildung 3.5: Zwei affine Darstellungen der Diagonalfäche von Clebsch: $w = 2 \cdot (1 - x - y - z)$ (links) bzw. $w = 1$ (rechts).

Für die *Cubic Surface Homepage* haben wir diese Wahl übernommen. Für unsere Anwendungen hat diese Darstellung nämlich den weiteren Vorteil, daß der Prozeß des *Zusammenziehens eines Halses* gut zu beobachten ist (für Abbildungen s. Abschnitt 4.4 und das Daumenkino *Von Clebsch bis Cayley*), da die vier Hälse sehr regelmäßig angeordnet sind und daher die vier Doppelpunkte der Cayley-Kubik, die durch das Zusammenziehen entstehen, ebenfalls schön zu sehen sind.

Da wir im *Cubic Surface Program* zur Verdeutlichung der Krümmung in Punkten der Fläche und zur Veranschaulichung des Übergangs einer allgemeinen Tangentialebene in eine Tritangentialebene auch Tangentialebenen in bestimmten Punkten zeichnen lassen wollen, bemerken wir hier noch, daß nach Wahl einer Basis $\{\varphi_0, \dots, \varphi_3\}$ des Linearsystems der Kubiken durch die sechs Punkte, die eindeutigen Koordinaten des zu einem Punkt $P \in \mathbf{P}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_6\}$ gehörigen Bildpunktes durch $Q = (\varphi_0(P) : \dots : \varphi_3(P)) \in \mathbf{P}^3$ gegeben sind (s. Abschnitt 1.3).

Als Basis wählen wir entsprechend (3.14), S. 63, vier Kubiken aus $\{a, b, \dots, f\}$, so daß für die anderen beiden (oBdA. e und f) gilt: $\bar{e} \neq \bar{f}$. Wir haben also den Bildpunkt Q gefunden und können somit die Tangentialebene in diesem Punkt an die kubische Fläche berechnen:

$$T_Q(x, y, z, w) = x \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(Q) + y \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(Q) + z \cdot \frac{\partial F}{\partial z}(Q) + w \cdot \frac{\partial F}{\partial w}(Q).$$

Eine andere Anwendung der expliziten Koordinaten der Punkte wäre es, über eine Triangulierung des \mathbf{P}^2 eine Triangulierung der Fläche zu erhalten. Hierzu muß man nur in der Umgebung der sechs Punkte ein wenig aufpassen; in jeder Richtung ergeben sich unterschiedliche Koordinaten als Grenzwert, da jeder der sechs Punkte

ja durch die allen Richtungen entsprechende Gerade ersetzt wird. Somit werden Dreiecke der Ebene, die einen dieser sechs Punkte als Eckpunkt enthalten, auf ein Viereck der Fläche abgebildet, das man dann in zwei Dreiecke aufteilen muß.

Eine solche Triangulierung der Fläche ist interessant, da man diese dann mit Hilfe eines 3D-Betrachtungs-Programmes in Echtzeit drehen, sich von verschiedenen Blickwinkeln aus ansehen und auf ihr 'herumlaufen' kann (beispielsweise auf festgelegten Pfaden, wie einer der Geraden). Es ist sogar möglich, mehrere kubische Flächen zu einem sich verändernden Szenario zusammenzufassen und dann in diesem Szenario herumzulaufen, es zu drehen etc. Mit ein wenig Programmierung könnte man auch, ohne Neuberechnungen durchführen zu müssen, beliebige Objekte (Geraden, Ebenen, Flächen) ein- bzw. ausblenden. Leider hatte ich nicht genügend Zeit, diese weiteren interessanten Anwendungen der expliziten Gleichungen zu implementieren.

Kapitel 4

Spezielle Konfigurationen der sechs Punkte

In den vorangehenden Kapiteln haben wir nur den Fall glatter kubischer Flächen betrachtet, den Fall also, in dem die sechs Punkte P_1, P_2, \dots, P_6 des \mathbf{P}^2 , in denen dieser aufgeblasen wird, weder auf einer gemeinsamen Konik noch drei von ihnen auf einer gemeinsamen Geraden liegen. In diesem Abschnitt werden wir nun diese besonderen Fälle untersuchen und im Anschluß daran erläutern, wie sich die Geraden auf den kubischen Flächen verändern, wenn die sechs Punkte nach und nach in solch eine spezielle Konfiguration verschoben werden. Da in einer gedruckten Arbeit nur einzelne Bilder gezeigt werden können, die diese Entwicklung veranschaulichen, liegen zur Verdeutlichung Daumenkinos bei, anhand derer man die Ausführungen besser nachvollziehen kann.

Für diese Untersuchungen nutzen wir die expliziten Gleichungen, die wir im vorigen Kapitel berechnet haben, indem wir die sich durch die speziellen Konfigurationen ergebenden Determinanten – Bedingungen der Form $(123) = 0$ oder $(12, 34, 56) = 0$ dort einsetzen. Dies wird zeigen, wie gut diese Gleichungen geeignet sind, um die Verhältnisse der Geraden, Tritangentialebenen und der Fläche untereinander im Detail zu verstehen.

4.1 Eckardt – Punkte

Alle Punkte des \mathbf{P}^2 außer den sechs speziellen Punkten haben auf der Fläche einen eindeutigen Bildpunkt, auch wenn die sechs Punkte nicht in allgemeiner Lage sind (s. Abschnitt 1.3). Daher haben wir sofort:

Satz 4.1

Zwei oder drei Geraden, die sich in der Ebene in einem Punkt, der nicht einer der sechs speziellen Punkte ist, schneiden, treffen sich auch auf der Fläche in einem Punkt (Abb. 4.1). □

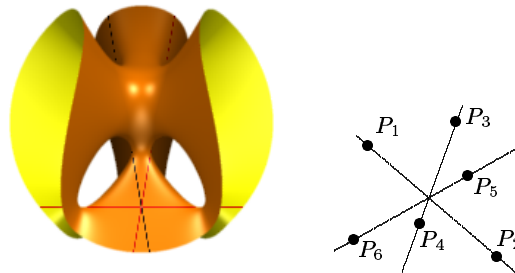


Abbildung 4.1: Drei Geraden schneiden sich hier in einem gemeinsamen, glatten Punkt der Fläche, einem sog. Eckardt-Punkt.

Glatte Punkte einer kubischen Fläche, in denen sich drei Geraden treffen heißen Eckardt-Punkte (s. Definition 1.6). Neben der eben erwähnten Möglichkeit, solche Punkte zu erhalten, gibt es noch eine weitere; es gilt genauer:

Satz 4.2 (Punkt-Konfigurationen und Eckardt-Punkte)

Sind die sechs Punkte P_1, \dots, P_6 des \mathbf{P}^2 in allgemeiner Lage (d.h. keine drei liegen auf einer gemeinsamen Geraden, nicht alle sechs auf einer gemeinsamen Konik), so gibt es genau die folgenden beiden Möglichkeiten, durch eine spezielle Punkt-Konfiguration einen Eckardt-Punkt zu erhalten:

- In der Ebene schneiden sich drei Geraden durch jeweils zwei der sechs Punkte in einem Punkt, der keiner der sechs speziellen Punkte ist (Abb. 4.1).
- In der Ebene berührt eine Gerade durch zwei der sechs Punkte eine Konik durch fünf der sechs Punkte in einem der sechs speziellen Punkte (Abb. 4.2).

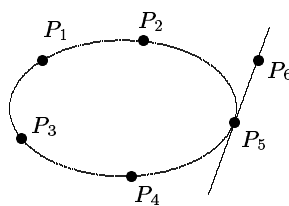


Abbildung 4.2: Eine Konfiguration, die einen Eckardt-Punkt liefert.

Beweis: Ein Eckardt-Punkt kann höchstens entstehen, wenn sich entweder

- in der Ebene drei Geraden in einem Punkt schneiden, der nicht einer der sechs ist,

- eine Gerade eine Konik in einem der sechs Punkte berührt,
- zwei Geraden sich auf einer Konik im selben Punkt schneiden (der nicht einer der sechs Punkte ist),
- zwei Geraden sich in einem der sechs Punkte in derselben Richtung treffen (also übereinstimmen),
- zwei der Koniken sich in einem Punkt schneiden, der nicht einer der sechs ist.

Die drei letzten Fälle können aber offenbar nicht eintreten, wenn die sechs Punkte in allgemeiner Lage sind, also insbesondere keine drei auf einer Geraden und nicht alle sechs auf einer Konik liegen. \square

Man kann sich überlegen, daß so maximal 10 Eckardt-Punkte auftreten können¹. Erreicht wird diese Maximalzahl von der sog. Diagonalfäche von Clebsch (s. Abschnitt 4.4.1).

4.2 A_1 - und A_2 -Singularitäten

Wie wir im Abschnitt 1.3 gesehen haben, wird jeder der sechs Punkte P_i auf eine Gerade a_i abgebildet, deren Punkte den Richtungen in diesem Punkt der Ebene entsprechen. Die den ebenen Geraden $(12x)$, $(13x)$, $(14x)$, $(15x)$, $(16x)$ entsprechenden Geraden $c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}$ schneiden also die Gerade a_1 , die dem Punkt P_1 entspricht, in fünf verschiedenen Punkten, falls nicht zwei der ebenen Geraden zusammenfallen und daher im Punkt P_1 dieselbe Richtung haben. Jede der sechs Koniken i' durch die fünf Punkte $\{1, \dots, 6\} \setminus \{i\}$ wird auf eine Gerade b_i abgebildet und die sechs b_i bilden gemeinsam mit den a_i eine Doppel-Sechs. Dies kann man nutzen, um zu verstehen, was in Fällen passiert, in denen die sechs Punkte nicht in allgemeiner Lage sind, also entweder

- drei oder mehr Punkte auf einer Geraden liegen,
- alle sechs Punkte auf einer Konik liegen oder
- zwei oder mehr Punkte unendlich nah beisammen liegen.

Für den Beweis des Satzes 1.18 auf Seite 28, der aussagt, daß sich der Blow-Up $\tilde{\mathbf{P}}^2$ des \mathbf{P}^2 in den sechs Punkten $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$ als kubische Fläche im \mathbf{P}^3 auffassen läßt, haben wir benutzt, daß diese Punkte in allgemeiner Lage sind. Und tatsächlich ist eine solche injektive Einbettung nicht möglich, wenn einer der eben

¹Wir haben dies schon im Abschnitt 3.2.3 auf Seite 62 gesehen. Es ergibt sich auch daraus, daß die Hessesche einer allgemeinen kubischen Fläche nur 10 Doppelpunkte hat und Eckardt-Punkte genau in solchen Doppelpunkten auftreten - s. Abschnitt 1.1.

genannten speziellen Fälle auftritt.

In [GH, 1994, S. 640 ff] wird nämlich gezeigt, daß der Blow-Up $\tilde{\mathbf{P}}^2$ die Desingularisierung \tilde{S} der singulären kubischen Fläche² $S := \overline{\varphi_L(\mathbf{P}^2)} \subset \mathbf{P}^3$ ist, wenn S nur *isolierte, gewöhnliche Doppelpunkte* hat (im Wesentlichen sind dies Singularitäten wie die eines Kegels; sie heißen daher auch *konische* oder *C_2 -Singularitäten* oder - aus anderen Gründen - *A_1 -Singularitäten*; s. [GH, 1994, S. 636-646] für eine exaktere Darstellung). Außerdem wird erklärt, daß, wenn entweder genau zwei der sechs Punkte im \mathbf{P}^2 unendlich nah beisammen, drei auf einer gemeinsamen Geraden oder alle auf einer gemeinsamen Konik liegen, S einen gewöhnlichen Doppelpunkt besitzt. Genauer ist diese gemeinsame Gerade durch drei bzw. die gemeinsame Konik durch sechs Punkte des \mathbf{P}^2 das Bild unter der Blow-Down Abbildung $\pi : \tilde{S} \rightarrow \mathbf{P}^2$. Da wir in Satz 3.14 gesehen haben, daß die kubische Fläche in Cobles Hexaederform genau dieser Fläche S entspricht, können wir also die im 3. Kapitel gefundenen Gleichungen nutzen, um die kubische Fläche S zu untersuchen — wie wir in Lemma 3.13 gesehen haben, können wir die Gleichungen aus dem 3. Kapitel nicht nur nutzen, wenn die sechs Punkte in allgemeiner Lage sind, sondern es reicht aus, daß keine fünf Punkte auf einer Geraden liegen, um eine kubische Fläche im \mathbf{P}^3 zu erhalten. Bei der Analyse verwenden wir jeweils Bedingungen wie $(123) = 0$, die sich durch die spezielle Lage der Punkte (hier liegen P_1, P_2 und P_3 auf einer gemeinsamen Geraden) ergeben, und die, in die expliziten Gleichungen eingesetzt, Schlüsse über die Lage der Geraden und Tritangentialebenen zueinander zulassen.

Notation 4.3 *Wir bezeichnen mit c_{12} etc. weiterhin den Schnitt der fünf in den Sätzen 3.15, 3.16 bzw. 3.20 angegebenen Mengen:*

$$\begin{aligned} c_{12} &= \{a + d = 0\} \cap \{b + e = 0\} \cap \{c + f = 0\} \\ &\cap \{(\overline{ad} - d_2)(a + d) - (\overline{be} + d_2)(b + e) = 0\} \\ &\cap \{(\overline{ad} + d_2)(a + d) - (\overline{be} - d_2)(b + e) = 0\}. \end{aligned}$$

Im glatten Fall entspricht dies dem Bild der ebenen Geraden (12x); wie eben erwähnt, wird aber, falls beispielsweise die Punkte P_1, P_2 und P_3 auf einer Geraden liegen, die gesamte Gerade $(12x) = (13x) = (23x)$ auf den Doppelpunkt der Fläche abgebildet. Es ist sinnvoll, mit c_{12} weiterhin eine Gerade der Fläche und nicht den Doppelpunkt zu bezeichnen, da erstens die Geraden c_{12} und a_3 beim im Abschnitt 4.4 besprochenen Übergangsprozeß im Grenzwert übereinanderfallen (s. auch das Daumenkino Von Clebsch bis Cayley) und da zweitens diese Information verloren ginge, wenn wir nur angeben würden, daß die Gerade a_3 doppelt gezählt werden muß.

Satz 4.4 (Drei Punkte auf einer Geraden)

Liegen drei Punkte (oBdA. seien dies P_1, P_2 und P_3) auf einer gemeinsamen Geraden (Abb. 4.3), so hat die kubische Fläche S einen Doppelpunkt D . Dieser ist

² $\varphi_L : \mathbf{P}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_6\} \rightarrow \mathbf{P}^3$ ist wie in Abschnitt 1.3 die komponentenweise aus den Basiselementen $\varphi_i, i = 0, 1, 2, 3$ des Linearsystems L aller Kubiken durch die sechs Punkte $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$ bestehende Abbildung.

genau das Bild der drei in der Ebene übereinander fallenden Geraden. In D treffen sich die $2 \cdot 3 = 6$ auf der Fläche in Paaren übereinander liegenden Geraden $\{a_1, c_{23}\}$, $\{a_2, c_{13}\}$ bzw. $\{a_3, c_{12}\}$ und außerdem die $2 \cdot 3 = 6$ auf der Fläche in Paaren übereinander liegenden Geraden $\{b_4, c_{56}\}$, $\{b_5, c_{46}\}$ bzw. $\{b_6, c_{45}\}$.

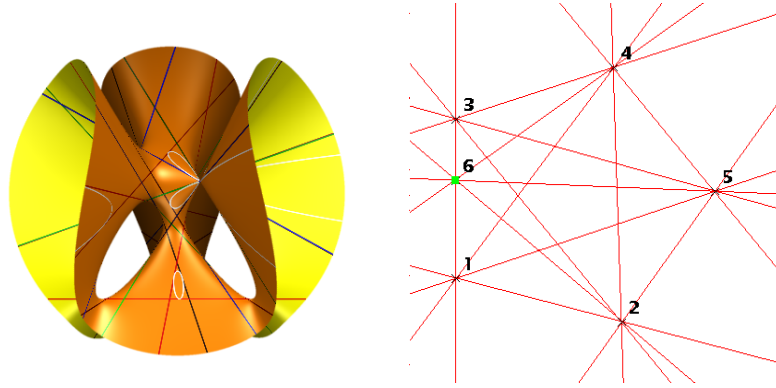


Abbildung 4.3: Liegen drei Punkte auf einer Geraden, treffen sich sechs jeweils doppelt zählende Geraden in einem Doppelpunkt der Fläche.

Beweis: Liegen die drei Punkte P_1 , P_2 und P_3 in der Ebene auf einer gemeinsamen Geraden, so stimmen die drei ebenen Geraden $(12x)$, $(13x)$ und $(23x)$ überein. Das gemeinsame Bild dieser drei übereinander liegenden Geraden ist nach der Tabelle (3.16) auf Seite 65 also der Schnitt der $3 \cdot 3 = 9$ Ebenen

$$\begin{aligned} c_{12} = c_{13} = c_{23} &= \{a + d = 0\} \cap \{b + e = 0\} \cap \{c + f = 0\} \\ &\cap \{a + f = 0\} \cap \{b + d = 0\} \cap \{c + e = 0\} \\ &\cap \{a + e = 0\} \cap \{b + f = 0\} \cap \{c + d = 0\}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $a = b = c = -d = -e = -f$, so daß das Bild dieser drei in der Ebene übereinander liegenden Geraden nur aus einem Punkt, nämlich $(1 : 1 : 1 : -1 : -1 : -1) \in \mathbf{P}^5$ besteht.

Es bleibt nun noch zu zeigen, welche Geraden sich in diesem Punkt treffen; hierzu ziehen wir die Übersicht (3.19) auf Seite 67 zu Rate. Da in dem hier betrachteten Fall die Determinante (123) und damit auch alle durch Punktvertauschung aus ihr hervorgehenden, also (132) etc., verschwinden, sehen wir aus der Tabelle, daß 9 der Ebenen mit den obigen 9 Ebenen zusammenfallen. Es sind dies diejenigen, die das Bild einer Konik, die durch die drei Punkte P_1 , P_2 und P_3 geht, und einer Geraden, die durch genau einen der drei Punkte geht, enthalten:

$$\begin{aligned} (14x)(12356x^2) : E(c_{14}, a_1, b_4) &= \{b + f = 0\}, \\ (15x)(12346x^2) : E(c_{15}, a_1, b_5) &= \{c + d = 0\}, \\ (16x)(12345x^2) : E(c_{16}, a_1, b_6) &= \{a + e = 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(24x)(12356x^2) : E(c_{24}, a_2, b_4) &= \{c + e = 0\}, \\
(25x)(12346x^2) : E(c_{25}, a_2, b_5) &= \{a + f = 0\}, \\
(26x)(12345x^2) : E(c_{26}, a_2, b_6) &= \{b + d = 0\}, \\
(34x)(12356x^2) : E(c_{34}, a_3, b_4) &= \{a + d = 0\}, \\
(35x)(12346x^2) : E(c_{35}, a_3, b_5) &= \{b + e = 0\}, \\
(36x)(12345x^2) : E(c_{36}, a_3, b_6) &= \{c + f = 0\}.
\end{aligned}$$

Hieraus können wir nun schließen, welche Geraden übereinanderfallen und durch den Doppelpunkt gehen.

Betrachten wir beispielsweise die erste dieser Ebenen: $\{b + f = 0\}$. Aus der Tabelle (3.5) auf Seite 55 sehen wir, welche Geraden durch sie aus der Fläche geschnitten werden: c_{23} , c_{14} und c_{56} . Aus der Darstellung $E(c_{14}, a_1, b_4) = \{b + f = 0\}$ wissen wir, daß sie außerdem die Geraden a_1 und b_4 aus der Fläche schneidet. Eine Ebene kann aber nach Bézout nur drei Geraden aus einer kubischen Fläche schneiden; es fallen also einige Geraden zusammen.

Nehmen wir noch die zweite Ebene, $\{c + d = 0\}$, hinzu, so können wir entscheiden, wie die Verhältnisse genau liegen. Wie eben schneidet diese Ebene nämlich die Geraden c_{15} , c_{23} und c_{46} sowie a_1 und b_5 aus der Fläche. Wir sehen also, daß a_1 mit der Geraden c_{23} (s. Notation 4.3 auf Seite 77), b_4 mit c_{56} und b_5 mit c_{46} zusammenfällt.

Die weiteren Behauptungen dieser Art ergeben sich entsprechend. Die Tatsache, daß all diese Geraden durch den Doppelpunkt gehen, ergibt sich aus der Betrachtung der Konfiguration in der Ebene, da dort die drei Punkte P_1 , P_2 und P_3 auf der gemeinsamen Geraden durch die drei Punkte liegen, die Geraden $(45x)$, $(46x)$ und $(56x)$ diese Gerade schneiden und die Koniken $(12345x^2)$, $(12346x^2)$ und $(12356x^2)$ sie (nach Bézout) als Komponente enthalten. \square

Wir hätten uns diesen Satz zwar auch klarmachen können, indem wir nur mit der Konfiguration in der Ebene und der Tatsache, daß die speziellen Punkte auf Geraden abgebildet werden, die allen Richtungen in diesen Punkten entsprechen, argumentieren; allerdings werden die auftretenden Verhältnisse dann nicht ganz so offenkundig.

Daß sich die drei auf dem Blow-Up disjunkten exzeptionellen Geraden a_1 , a_2 und a_3 auf der Fläche im \mathbf{P}^3 in einem Punkt treffen, zeigt, daß der Blow-Up in diesem Spezialfall nicht wie im glatten Fall als kubische Fläche im \mathbf{P}^3 aufgefaßt werden kann - auf Seite 1.3 kann Lemma 1.17 nicht mehr genutzt werden, um zu zeigen, daß die Projektion $\tilde{\varphi}_L$ injektiv ist. Wie schon zuvor erwähnt ist der Blow-Up hier eine Desingularisierung der kubischen Fläche.

Im obigen Beweis wird das Auftreten des Doppelpunktes nicht direkt gezeigt, sondern nur nachgewiesen, daß sich mehr als drei Geraden (nämlich sechs doppelt zählende) in einem Punkt treffen. Wie schon gesehen, liegen aber alle Tangenten an einen glatten Punkt in einer gemeinsamen Tangentialebene und eine solche kann nur eine ebene Kubik, also maximal drei Geraden, aus der kubischen Flächen

schneiden. Gehen also mehr als drei Geraden durch einen Punkt, kann dies kein glatter sein.

Eine Begründung, warum solche Singularitäten gewöhnliche Doppelpunkte darstellen, können wir hier leider nicht geben. Hierfür muß man die Singularitäten auf kubischen Flächen genauer studieren, was den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde (s. [Sch, 1863a], [Cay, 1869] und, für gewöhnliche Doppelpunkte auf kubischen Flächen, [GH, 1994, S. 636-646]). Auch in Satz 4.6 weiter unten werden wir nur nachweisen, daß sechs doppelt zählende Geraden durch einen Punkt gehen, um zu sehen, daß dies ein gewöhnlicher Doppelpunkt ist.

Satz 4.5 (Mehrmals drei Punkte auf einer Geraden)

Tritt der Fall, daß drei Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, mehrmals auf, ohne daß alle sechs Punkte auf einer Konik liegen, so ergibt sich jeweils ein gewöhnlicher Doppelpunkt (s. Abb. 4.4). Auf diese Weise erhalten wir maximal vier gewöhnliche Doppelpunkte.

Beweis: Die erste Aussage folgt direkt aus Satz 4.4. Die Maximalzahl kann man einsehen, wenn man sich die Konfiguration der Geraden in diesem Spezialfall anschaut (Abb. 4.19 auf Seite 97); in [GH, 1994, S. 644-646] findet sich eine exaktere Begründung. \square

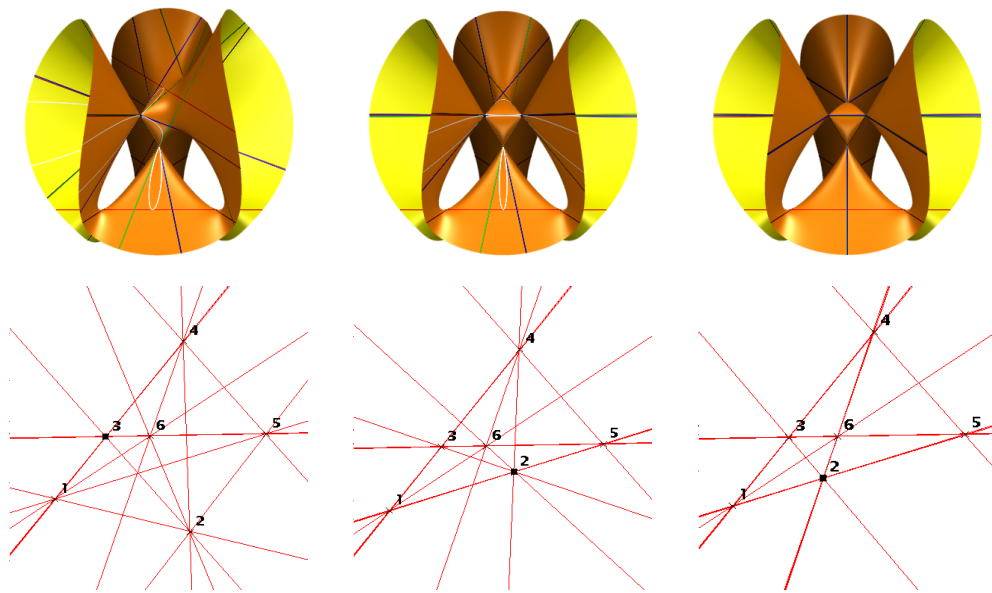


Abbildung 4.4: Zwei, drei bzw. vier Doppelpunkte entstehen, wenn zwei, drei bzw. vier Mal jeweils drei Punkte auf einer Geraden liegen.

Die Fläche mit vier solchen Doppelpunkten heißt Cayley Kubik und wird in Abschnitt 4.4.3 noch einmal gesondert besprochen. Einen gewöhnlichen Doppelpunkt

hat die kubische Fläche aber nicht nur, wenn drei Punkte auf einer Geraden, sondern auch, wenn alle sechs auf einer Konik liegen, wie im folgenden Satz gezeigt wird.

Satz 4.6 (Alle sechs Punkte auf einer Konik)

Liegen sechs Punkte auf einer gemeinsamen Konik, die nicht in zwei Geraden zerfällt, so treffen sich die sechs Geraden a_i , die den Punkten entsprechen, in einem gewöhnlichen Doppelpunkt der Fläche. Die gemeinsame Konik in der Ebene hat als Bild auf der Fläche nur diesen Doppelpunkt; die Gerade b_i fällt mit der Geraden a_i zusammen für alle $i = 1, 2, \dots, 6$ (s. auch Notation 4.3 auf Seite 77). Die anderen 15 Geraden c_{ij} auf der Fläche gehen im Allgemeinen nicht durch diesen Doppelpunkt und treffen daher das Bild der Konik nicht.

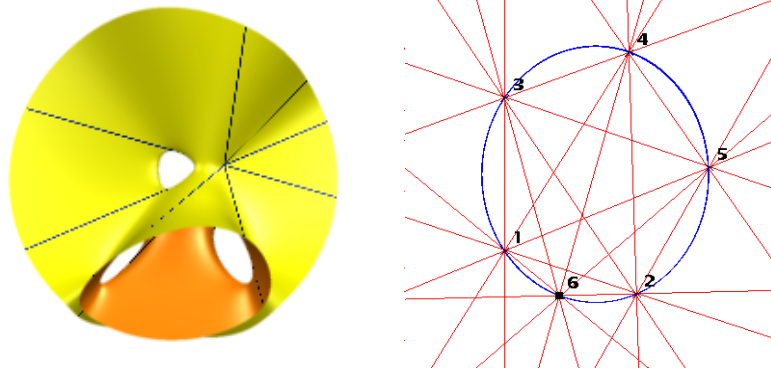


Abbildung 4.5: Liegen alle sechs Punkte auf einer Konik, so treffen sich die sechs exzeptionellen Geraden a_i in einem gewöhnlichen Doppelpunkt (in dieser affinen Darstellung hat er ein ungewohntes Aussehen), dem Bild der Konik.

Beweis: Alle sechs Koniken $(12345x^2)$ etc. in der Ebene sind identisch; daher besteht das Bild dieser Konik nur aus einem Punkt, und zwar dem Schnitt aller in (3.19) auf Seite 67 aufgelisteten Ebenen (von denen hier jeweils zwei aufeinander folgende identisch sind). Dieser Schnitt ist nämlich nicht leer, da er ja das Bild der Konik enthält, besteht aber auch nicht aus mehr als einem Punkt, da beispielsweise die drei ebenen Kubiken $(12x)(12345x^2)$, $(34x)(12345x^2)$ und $(56x)(12345x^2)$ linear unabhängig sind, wenn sich die Geraden $(12x)$, $(34x)$ und $(56x)$ nicht in einem Punkt schneiden (was wir oBdA. annehmen können).

Da alle sechs Punkte in der Ebene auf der Konik liegen (s. auch Abb. 4.5), gehen alle exzeptionellen Geraden durch diesen Punkt. Eine Ebene $E(c_{12}, a_1, b_2)$ (s. Satz 3.16), die im Normalfall eine Gerade der Form c_{12} , eine exzeptionelle Gerade a_1 und eine Gerade, die einer Konik entspricht, b_2 , aus der Fläche schneidet, liefert jetzt ebenfalls die Gerade c_{12} und außerdem a_2 und b_1 (wie oben schon erwähnt sind ja zwei in der Tabelle aufeinander folgende Ebenen identisch). Daher liegen a_i

und b_i übereinander für alle $i = 1, 2, \dots, 6$. Die 15 Verbindungsgeraden der sechs Punkte treffen die Konik in der Ebene aber nur genau in diesen sechs Punkten und gehen daher auf der Fläche nicht durch den Doppelpunkt, da die Tangenten an die Konik in allen sechs Punkten im Allgemeinen natürlich nicht mit einer der Verbindungsgeraden übereinstimmen.

Wir haben also gesehen, daß sich genau sechs doppelt zählende Geraden im Doppelpunkt treffen; wie schon im Anschluß an Satz 4.4 bemerkt ist dies ein gewöhnlicher (A_1 -) Doppelpunkt. \square

Schon Clebsch studiert in [Cle, 1866] übrigens die Verhältnisse der Geraden auf kubischen Flächen mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt, der auftritt, weil die sechs Punkte auf einer Konik liegen.

Kommen wir nun noch zum Fall, in dem sogar eine A_2 -Singularität entsteht.

Satz 4.7

Liegen alle sechs Punkte auf einer in zwei Geraden zerfallenden Konik, aber keiner der Punkte auf deren Schnitt (also je drei auf einer Geraden, aber keine vier auf einer Geraden; oBdA. seien dies $\{P_1, P_2, P_3\}$ und $\{P_4, P_5, P_6\}$), so hat die entsprechende kubische Fläche eine A_2 -Singularität D . In D treffen sich die 18 in Tripeln übereinander liegenden Geraden $\{a_1, b_1, c_{23}\}$, $\{a_2, b_2, c_{13}\}$, $\{a_3, b_3, c_{12}\}$, $\{a_4, b_4, c_{56}\}$, $\{a_5, b_5, c_{46}\}$, $\{a_6, b_6, c_{45}\}$ (Abb. 4.6).

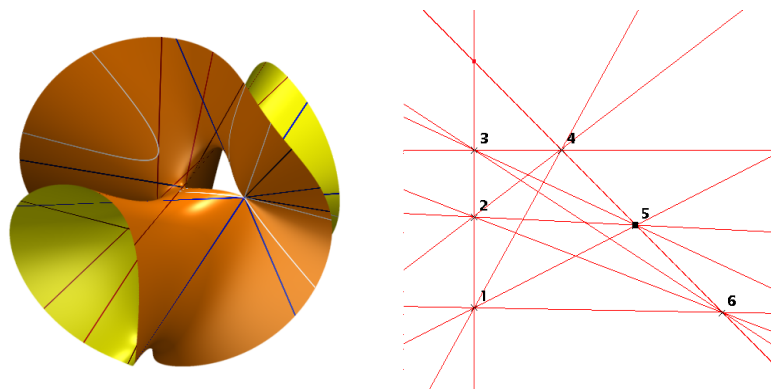


Abbildung 4.6: Liegen alle sechs Punkte auf einer in zwei Geraden zerfallenden Konik, aber keiner der Punkte auf deren Schnitt, so hat die entsprechende kubische Fläche eine A_2 -Singularität.

Beweis: Wir sind in einer Situation, in der wir Satz 4.6 und zweifach Satz 4.4 (für die Punkte P_1, P_2 und P_3 sowie P_4, P_5 und P_6) anwenden können. Deren Aussagen ergeben gemeinsam genau die Behauptung. Zu beachten ist hierbei, daß sich, wenn man Satz 4.4 auf die Punkte P_1, P_2 und P_3 bzw. auf die Punkte P_4, P_5 und P_6 anwendet, exakt dieselbe Geraden – Konfiguration ergibt. \square

Eines der beiliegenden Daumenkinos verdeutlicht, wie sich eine Fläche mit dieser Singularität aus einer glatten Fläche entwickelt. Es entstand, indem ich im *Cubic Surface Program* zunächst den Punkt P_3 langsam auf die Gerade $(12x)$ und dann den Punkt P_4 auf die Gerade $(56x)$ zubewegt habe.

4.3 Zerfallende Flächen

Wir kommen nun zu solchen Konfigurationen der sechs Punkte $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$, in denen die entsprechende kubische Fläche S , gegeben in Cobles Hexaederform (Satz 3.14), nicht nur einzelne singuläre Punkte hat, sondern in Flächen niedrigeren Grades zerfällt.

Notation 4.8 (Zwei Punkte stimmen überein) *In diesem Abschnitt interessieren wir uns nicht mehr für die Deutung des Blow-Ups des \mathbf{P}^2 in den sechs Punkten P_1, \dots, P_6 , sondern betrachten einfach den Grenzwert der kubischen Flächen, wenn die sechs Punkte gegen eine spezielle Konfiguration konvergieren, indem wir die explizite Gleichung der Fläche für die spezielle Punkt – Konfiguration ausrechnen.*

Dadurch ist es uns möglich, auch Punkt – Konfigurationen zu behandeln, bei denen zwei Punkte P_i und P_j identische Koordinaten haben; da so P_j keine eindeutige Richtung in P_i definiert, können wir den \mathbf{P}^2 in solchen Punkten nicht aufblasen und auch nicht von unendlich nahen Punkten sprechen. Wir sagen statt dessen einfach, daß P_1 und P_2 übereinstimmen.

Zunächst aber zu der Situation, in der vier der sechs Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Satz 4.9 (Vier Punkte auf einer Geraden)

Liegen genau vier der sechs Punkte des \mathbf{P}^2 auf einer Geraden und liegen höchstens jeweils zwei der sechs Punkte übereinander, so zerfällt die kubische Fläche S in eine Ebene E und eine Quadrik Q (Abb. 4.7). Q ist genau dann glatt, wenn nicht zwei der vier Punkte übereinander liegen. Ist dies aber der Fall, so zerfällt die Quadrik schon in zwei Ebenen, so daß die kubische Fläche in diesem Fall also in drei Ebenen zerfällt.

Beweis: Betrachten wir beispielsweise den Fall, in dem die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 auf einer Geraden liegen. Nutzen wir die Beziehungen (3.7) aus, so erhalten wir: $\bar{b} = \bar{f}$, $\bar{c} = \bar{e}$ und $\bar{a} = \bar{d}$. Mit $\sum \bar{a} = 0$ ergibt sich außerdem $\bar{a} = -(\bar{e} + \bar{f})$. Da die Koeffizienten \bar{a}, \dots, \bar{f} mit einem beliebigen Faktor ungleich null gestreckt werden können, ohne die Gleichungen zu verändern, dürfen wir eine weitere Normierung vornehmen: $\bar{f} := 1 + \bar{e}$ (in unserer Situation ist $\bar{f} - \bar{e} = (15, 43, 26) \neq 0$, da wir zunächst voraussetzen, daß die Punkt – Paare $\{P_1, P_2\}$ und $\{P_3, P_4\}$ jeweils aus nicht übereinanderliegenden Punkten bestehen). Setzen wir dies in die Gleichung

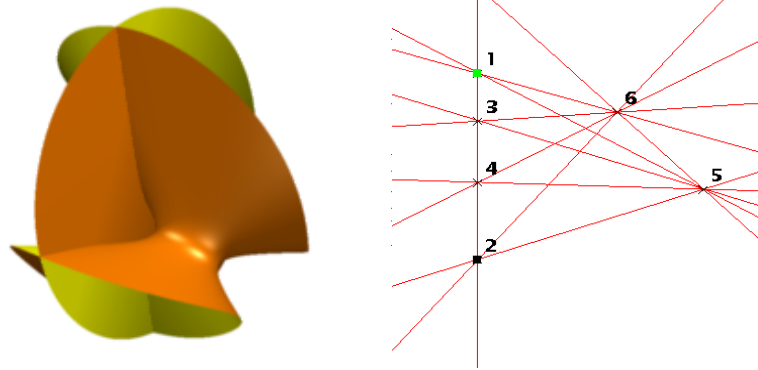


Abbildung 4.7: Eine kubische Fläche, die sich aus einer Quadrik und einer Ebene zusammensetzt, da vier der Punkte auf einer Geraden liegen.

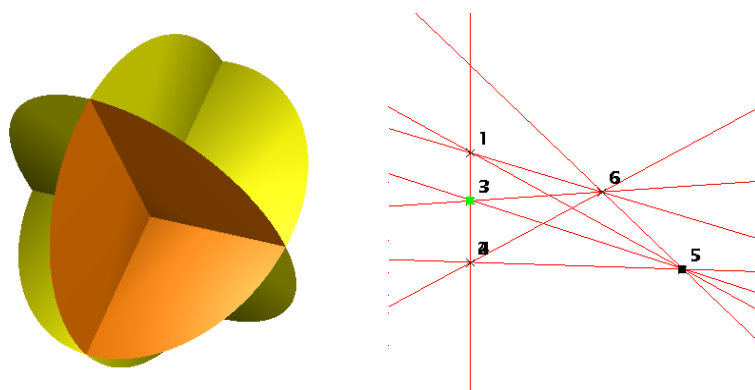


Abbildung 4.8: Eine kubische Fläche, die in drei Ebenen zerfällt, da die übereinander liegenden Punkte P_2 und P_4 mit P_1 und P_3 auf einer Geraden liegen.

der Fläche in Cobles Hexaederform (3.14) ein, so zerfällt diese in ein Polynom zweiten Grades und eines ersten Grades:

$$F = -3 \cdot (a + d) \cdot \begin{pmatrix} (9\bar{e}^2 + 9\bar{e} + 2)a^2 + (9\bar{e}^2 + 6\bar{e} + 1)ab + (-3\bar{e} - 1)b^2 \\ +(9\bar{e}^2 + 12\bar{e} + 4)ac + (3\bar{e} + 2)c^2 + (18\bar{e}^2 + 18\bar{e} + 5)ad \\ +(9\bar{e}^2 + 6\bar{e} + 1)bd + (9\bar{e}^2 + 12\bar{e} + 4)cd + (9\bar{e}^2 + 9\bar{e} + 2)d^2 \end{pmatrix}.$$

Der Gradient der Quadrik Q in der Klammer verschwindet genau für die \bar{e} , die die quadratische Gleichung $9\bar{e}^2 + 9\bar{e} + 2 = 0$ erfüllen. Setzen wir deren Lösungen $\bar{e} = -\frac{1}{3}$ und $-\frac{2}{3}$ nun wieder in Q ein, so finden wir:

$$Q_{-\frac{1}{3}} = (a + c)(c + d) \text{ bzw. } Q_{-\frac{2}{3}} = (a + b)(b + d), \quad (4.1)$$

so daß Q schon in zwei Ebenen zerfällt.

Betrachten wir nun den ersten dieser beiden Fälle genauer: $\bar{e} = -\frac{1}{3}$ und daher $\bar{f} = 1 + \bar{e} = \frac{2}{3} = -2\bar{e}$. Es gilt somit: $\bar{c} + \bar{e} + \bar{f} = 2\bar{e} - 2\bar{e} = 0$. Mit Lemma 3.10 folgt:

$$(145)(326) = 0 = (146)(253).$$

Dies kann aber nur passieren, wenn entweder einer der Punkte P_5 oder P_6 auf der Geraden durch P_1, \dots, P_4 liegt (was wir ausgeschlossen haben), P_1 mit P_4 übereinstimmt oder P_2 mit P_3 übereinstimmt. Analog erhält man für den Fall $\bar{e} = -\frac{2}{3}$, daß dann schon entweder P_1 mit P_3 oder P_2 mit P_4 übereinstimmen muß. Hätten wir oben vorausgesetzt, daß die Paare $\{P_1, P_3\}$ und $\{P_2, P_4\}$ jeweils aus nicht übereinander liegenden Punkten bestehen, hätten wir die restlichen beiden Möglichkeiten für übereinanderliegende Punkte erhalten (P_1 und P_2 sowie P_3 und P_4 bzw. P_1 und P_4 sowie P_2 und P_3).

Setzen wir umgekehrt voraus, daß zwei der vier Punkte, etwa P_1 und P_4 übereinander liegen, so erhalten wir $0 = \bar{c} + \bar{e} + \bar{f} = 2\bar{e} + \bar{f}$ und finden so, genauso wie eben, daß die Quadrik zerfällt. \square

Beim obigen Beweis fällt auf, daß die Struktur der Fläche sich nicht ändert, wenn die Punkte P_5 und P_6 übereinanderfallen - die Quadrik zerfällt nicht in drei Ebenen, wenn P_1, \dots, P_4 paarweise nicht, aber dafür P_5 und P_6 übereinanderfallen. Dies wird später anschaulich klar werden, wenn wir die Struktur der Geraden auf zerfallenden Flächen genauer untersuchen; der Beweis von Satz 4.10 liefert schon einen ersten Hinweis.

Satz 4.10 (Zwei Punkte stimmen überein)

Stimmen zwei Punkte, etwa P_5 und P_6 , überein (s. Notation 4.8), so besteht die kubische Fläche S ebenfalls aus einer Ebene und einer Quadrik. Die Fläche vom Grad zwei ist genau dann glatt, wenn nicht zwei der Punkte P_1, \dots, P_4 auf einer Geraden liegen mit P_5 und P_6 (also insbesondere nicht zwei der Punkte P_1, \dots, P_4 übereinander liegen). Ist dies aber der Fall, so zerfällt die Quadrik schon in zwei Ebenen.

Beweis: Genau wie im Beweis von Satz 4.9 können wir die Beziehungen (3.7) ausnutzen. Wieder erhalten wir daraus $\bar{b} = \bar{f}$, $\bar{c} = \bar{e}$ und $\bar{a} = \bar{d}$ (da hier: $(12, 34, 56) = (12, 34, 55) = 0$ etc.), so daß der Rest des Beweises analog zu obigem verläuft. \square

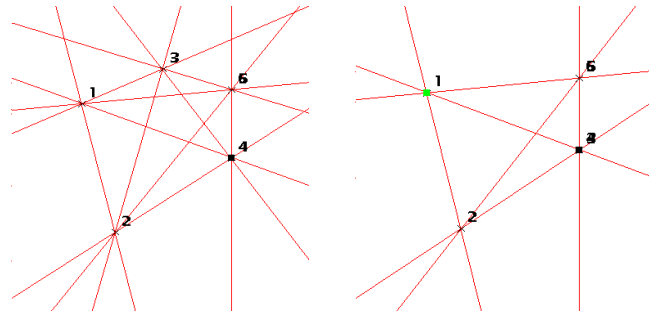


Abbildung 4.9: Konfigurationen, bei denen die Punkte P_5 und P_6 übereinander liegen.

Korollar 4.11

Die vorangegangenen Sätze zeigen, daß keine Punkt-Konfiguration existiert, so daß die entsprechende kubische Fläche in Cobles Hexaederform in eine Ebene und einen Kegel (eine Quadrik mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt) zerfällt. \square

Liegen sogar fünf oder sechs Punkte auf einer Geraden, erhalten wir, wenn wir die Beziehungen (3.7) auf Seite 57 benutzen: $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c} = \bar{d} = \bar{e} = \bar{f}$. Wir haben somit nicht die erforderlichen zwei unterschiedlichen linearen Beziehungen zwischen den Kubiken a, \dots, f , so daß wir keine kubische Fläche im \mathbf{P}^3 erhalten. Genauso argumentiert man, wenn drei oder mehr Punkte übereinander fallen.

Notation 4.12 Wir untersuchen nun die Konfiguration der c_{ij}, a_i, b_j , die sich, wie bisher, als Schnitt der im 3. Kapitel angegebenen Mengen ergeben (s. auch Notation 4.3 auf Seite 77):

$$\begin{aligned}
 c_{12} &= \{a + d = 0\} \cap \{b + e = 0\} \cap \{c + f = 0\} \\
 &\cap \{(\bar{a}d - d_2)(a + d) - (\bar{b}e + d_2)(b + e) = 0\} \\
 &\cap \{(\bar{a}d + d_2)(a + d) - (\bar{b}e - d_2)(b + e) = 0\}.
 \end{aligned}$$

Es wird sich zeigen, daß manche der Gleichungen äquivalent zueinander sind und daß sich sogar einige der Gleichungen auf $0 = 0$ reduzieren, so daß in einigen Fällen der Schnitt der fünf Tritangentialebenen, der im Normalfall aus einer Geraden besteht, jetzt eine Ebene oder sogar den ganzen \mathbf{P}^3 liefert. Wir werden aber sehen, daß die Inzidenzstruktur im Wesentlichen erhalten bleibt, wenn wir weiterhin diese Schnitte mit c_{ij}, a_i bzw. b_j bezeichnen. Um die Notation zu fixieren, betrachten wir im Folgenden wieder den Fall (s. den Beweis von Satz 4.9), in dem die vier Punkte P_1, \dots, P_4 auf einer Geraden liegen.

In dieser Situation gilt, wie wir in Satz 4.9 gesehen haben: $\bar{a} = \bar{d}, \bar{c} = \bar{e}, \bar{b} = \bar{f}, \bar{a} = -(\bar{e} + \bar{f})$. Daraus ergibt sich leicht:

$$a_2 = \sum \bar{a}\bar{b}$$

$$\begin{aligned}
 &= -(\bar{e} + \bar{f})(\bar{f} + \bar{e} - (\bar{e} + \bar{f}) + \bar{e} + \bar{f}) \\
 &\quad + \bar{f}(\bar{e} - (\bar{e} + \bar{f}) + \bar{e} + \bar{f}) \\
 &\quad + \bar{e}(-(\bar{e} + \bar{f}) + \bar{e} + \bar{f}) \\
 &\quad - (\bar{e} + \bar{f})(\bar{e} + \bar{f}) \\
 &\quad + \bar{e}\bar{f} \\
 &= -2(\bar{e}^2 + \bar{e}\bar{f} + \bar{f}^2).
 \end{aligned}$$

Setzen wir wie im obigen Beweis oBdA. $\bar{f} := 1 + \bar{e}$, so vereinfacht sich dies weiter zu:

$$a_2 = -2(3\bar{e}^2 + 3\bar{e} + 1).$$

Per Definition gilt somit (s. (3.22)): $\overline{cf} = a_2 + 2 \cdot (\bar{e}^2 + \bar{e}\bar{f} + \bar{f}^2) = 0$ und ähnlich für alle $u, v \in \{a, b, \dots, f\}$, $u \neq v$, $\{u, v\} \notin \{\{a, d\}, \{c, e\}, \{b, f\}\}$:

$$\overline{uv} = 0. \quad (4.2)$$

Für die drei Ausnahmen (die übrigens aus den zur Geraden $c_{56} = \{a + d\} \cap \{b + f\} \cap \{c + e\}$ gehörigen Paaren bestehen) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \overline{ad} &= 2 \cdot (9\bar{e}^2 + 9\bar{e} + 2) \begin{cases} = 0, & \bar{e} \in \{-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\}, \\ \neq 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\
 \overline{ce} &= -6\bar{e} - 2 \begin{cases} = 0, & \bar{e} = -\frac{1}{3}, \\ \neq 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\
 \overline{bf} &= -6\bar{e} - 4 \begin{cases} = 0, & \bar{e} = -\frac{2}{3}, \\ \neq 0, & \text{sonst.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Da in der aktuellen Situation alle sechs Punkte auf einer Konik liegen (die aus der Geraden durch P_1, \dots, P_4 und der Geraden durch P_5 und P_6 besteht), gilt außerdem $d_2^2 = 0$. In Satz 3.20 reduzieren sich somit schon alle außer den beiden durch c_{56} gehenden Ebenen auf Gleichungen der Form $0 = 0$, $a + d = 0$, $b + f = 0$ oder $c + e = 0$. Betrachten wir aber $b + f$ genauer, so erhalten wir mit (3.13):

$$\begin{aligned}
 b + f &= b + \frac{\bar{e} - \bar{a}}{\bar{f} - \bar{e}}a + \dots + \frac{\bar{e} - \bar{d}}{\bar{f} - \bar{e}}d \\
 &= b + \frac{\bar{e} - \bar{a}}{\bar{f} - \bar{e}}(a + d) + \frac{\bar{e} - \bar{f}}{\bar{f} - \bar{e}}b \\
 &= \frac{2\bar{e} + \bar{f}}{\bar{f} - \bar{e}}(a + d) \\
 &= (3\bar{e} + 1)(a + d) = \begin{cases} = 0, & \bar{e} = -\frac{1}{3}, \\ \neq 0, & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

und analog

$$c + e = (-3\bar{e} - 2)(a + d) = \begin{cases} = 0, & \bar{e} = -\frac{2}{3}, \\ \neq 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insgesamt gilt also:

$$\left. \begin{array}{l} \{\overline{ad} (a + d) = 0\} \\ \{\overline{ce} (c + e) = 0\} \\ \{\overline{bf} (b + f) = 0\} \end{array} \right\} = \begin{cases} \mathbf{P}^3, & \bar{e} \in \{-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\}, \\ \{a + d = 0\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.3)$$

1. Fall: \mathbf{Q} ist glatt. Betrachten wir zunächst den glatten Fall, also jenen, in dem die Quadrik nicht in zwei Ebenen zerfällt und daher $\bar{e} \notin \{-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\}$. Aus der Übersicht in Lemma 3.4 und Satz 3.20 sehen wir, daß wegen 4.3 dann alle a_i und alle b_i in der Ebene $\{a + d = 0\}$ liegen. Um diese Information nicht zu verlieren und da es sich später auch noch als sinnvoll erweist, werden wir daher (wie schon oben angekündigt) mit a_i und b_i weiter den Schnitt der fünf Mengen im \mathbf{P}^3 bezeichnen, der bei nicht zerfallenden Flächen aus den entsprechenden Geraden besteht. Es gilt somit:

$$a_i = b_i = \{a + d = 0\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, 6. \quad (4.4)$$

Außerdem gilt Ähnliches für c_{56} und wir haben:

$$c_{56} = \{a + d = 0\}. \quad (4.5)$$

Wie im Beweis von Satz 4.9 gesehen, ist $E = \{a + d = 0\}$ übrigens gerade die Komponente vom Grad eins der kubischen Fläche — diese 13 Objekte, $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, 6$ und c_{56} , bestehen also aus dieser Komponente E der kubischen Fläche $S = E \cdot Q$. Wir wissen aber noch mehr über E ; die Tabelle in Lemma 3.5 zeigt uns beispielsweise (wegen 4.3), daß auch $c_{12}, c_{34}, c_{13}, c_{24}, c_{14}$ und c_{23} darin liegen. Wie wir in Satz 4.4 über den Fall, in dem drei Punkte auf einer Geraden liegen, gesehen haben, treffen sich von diesen sechs c_{ij} jeweils drei in einem Punkt. Betrachten wir nämlich beispielsweise die Punkte P_1, P_2 und P_3 des \mathbf{P}^2 , die nach Voraussetzung auf einer Geraden liegen, so können wir den eben erwähnten Satz anwenden, um zu sehen, daß sich c_{12}, c_{13} und c_{23} in einem Punkt D_{123} mit c_{45}, c_{46} und c_{56} treffen. In D_{123} treffen sich also die drei in der Ebene E liegenden Geraden c_{12}, c_{13} und c_{23} und außerdem die auf der Quadrik Q liegenden c_{45} und c_{46} . Wir sehen also, daß für diesen Fall die Notation $c_{56} = E$ sinnvoll ist, da c_{56} ja auch durch D_{123} geht. Für die anderen drei Mengen aus jeweils dreien der vier Punkte P_1, \dots, P_4 gilt Analoges, so daß sich insgesamt ergibt (s. Abb. 4.11):

$$\begin{aligned} D_{123} &= c_{12} \cap c_{13} \cap c_{23} \cap c_{45} \cap c_{46}, \\ D_{124} &= c_{12} \cap c_{14} \cap c_{24} \cap c_{35} \cap c_{36}, \\ D_{134} &= c_{13} \cap c_{34} \cap c_{14} \cap c_{25} \cap c_{26}, \\ D_{234} &= \underbrace{c_{23} \cap c_{34} \cap c_{24}}_{\subset E} \cap \underbrace{c_{15} \cap c_{16}}_{\subset Q}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Wie man hieraus sieht, ist es sinnvoll, mit a_i, b_i und c_{56} ganz E zu bezeichnen, da erstens c_{56} durch all diese vier Punkte gehen muß, zweitens durch jeden der vier Punkte auch jeweils drei der a_i und drei der b_i gehen müssen (Satz 4.4) und

drittens wegen Satz 4.6 sich in all diesen Doppelpunkten die Geraden a_i und b_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ treffen müssen. Mit unseren Bezeichnungen werden all diese Schnittbedingungen erfüllt. Da sich jeweils die beiden Geraden, die in der Quadrik Q liegen, in einem Punkt schneiden, gehören sie zu unterschiedlichen Familien von Geraden auf Q . Da wir von Schläflis Notation der 27 Geraden her wissen, daß c_{45} die Geraden c_{36} , c_{26} und c_{16} schneidet, sehen wir, daß sich die acht auf der Quadrik liegenden Geraden jeweils zu viert in einer der Geraden – Familien von Q enthalten sind:

$$F_1 := \{c_{45}, c_{35}, c_{25}, c_{15}\}, \quad F_2 := \{c_{46}, c_{36}, c_{26}, c_{16}\}.$$

Mit Hilfe von (4.6) können wir auch die Konfiguration der Geraden auf E komplett beschreiben, die sechs Geraden bilden nämlich ein vollständiges Viereck (Abb. 4.10 und 4.11).

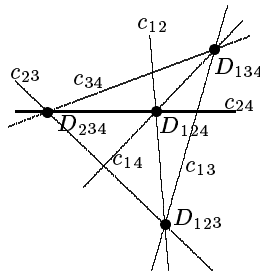


Abbildung 4.10: Die Konfiguration der in der Ebene E liegenden Geraden $c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{23}, c_{24}, c_{34}$ ist ein vollständiges Viereck.

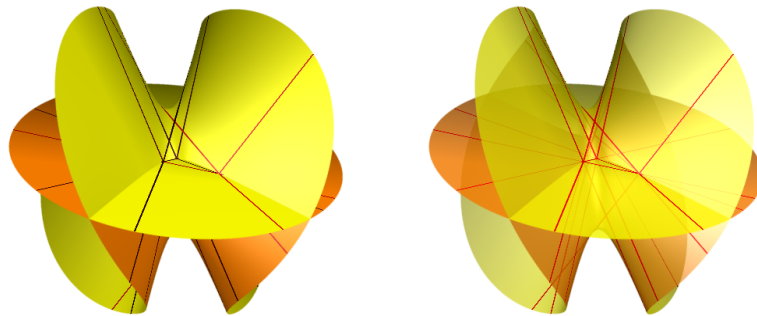


Abbildung 4.11: In vier Punkten des Schnittes treffen sich je 5 der Geraden; die Ebenen Geraden bilden ein vollständiges Viereck.

Um noch eine weitere Begründung dafür zu liefern, daß einige Geraden nicht eindeutig definiert werden können, betrachten wir nun noch kurz verschiedene Annäherungen an die spezielle Konfiguration, in der vier Punkte auf einer Geraden

liegen. Die betreffenden Geraden haben dann verschiedene Grenz – Geraden, so daß deren Bild im Grenzfall nicht eindeutig definiert werden kann (Abb. 4.12).

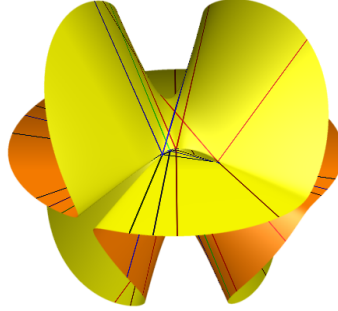


Abbildung 4.12: Eine Fläche, die durch leichte Verschiebung eines der sechs ebenen Punkte, die eine zerfallende Fläche ergeben, entsteht.

Wir vergleichen dies nun mit der Situation, in der P_5 und P_6 übereinander, aber nicht mit zwei der anderen Punkte auf einer Geraden liegen. Wie wir schon im Beweis von Satz 4.10 gesehen haben, erhalten wir hier völlig analoge Ergebnisse wie im Fall, in dem P_1, \dots, P_4 auf einer Geraden liegen. Die vier Punkte D_{123} ergeben sich wieder dadurch, daß vier Mal drei Punkte auf einer Geraden liegen. Jetzt sind dies zwar $\{P_1, P_5, P_6\}, \dots, \{P_4, P_5, P_6\}$, doch sehen wir aus Satz 4.4, daß in diesen Fällen die Geradenkonfiguration auf der Fläche genau jene ist, die entsteht, wenn $\{P_2, P_3, P_4\}, \dots, \{P_1, P_2, P_3\}$ auf einer Geraden liegen. Wir könnten die vier speziellen Punkte auf der Ebene E also auch benennen: $D_{156} = D_{234}, \dots, D_{456} = D_{123}$.

2. Fall: Q zerfällt. Wie wir in Satz 4.11 gesehen haben, ist dies der einzige noch zu behandelnde Fall. Da wir aus den Sätzen 4.9 und 4.10 wissen, daß dieser genau dann eintritt, wenn erstens vier Punkte auf einer Geraden und zweitens zwei dieser vier Punkte übereinander liegen, können wir einfach die Ergebnisse der beiden Situationen, die wir bisher betrachtet haben, zusammenstellen. Für P_1, \dots, P_4 auf einer Geraden haben wir:

$$\begin{aligned}
 D_{123} &= c_{12} \cap c_{13} \cap c_{23} \cap c_{45} \cap c_{46} = D_{456}, \\
 D_{124} &= c_{12} \cap c_{14} \cap c_{24} \cap c_{35} \cap c_{36} = D_{356}, \\
 D_{134} &= c_{13} \cap c_{34} \cap c_{14} \cap c_{25} \cap c_{26} = D_{256}, \\
 D_{234} &= \underbrace{c_{23} \cap c_{34} \cap c_{24}}_{\subset E_1 = c_{56}} \cap \underbrace{c_{15} \cap c_{16}}_{\subset Q_1} = D_{156}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Wenn die Punkte P_1 und P_4 übereinander liegen, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 D_{256} &= c_{25} \cap c_{26} \cap c_{56} \cap c_{13} \cap c_{34} = D_{134}, \\
 D_{356} &= c_{35} \cap c_{36} \cap c_{56} \cap c_{12} \cap c_{24} = D_{124}, \\
 D_{236} &= c_{36} \cap c_{26} \cap c_{23} \cap c_{15} \cap c_{45} = D_{145}, \\
 D_{235} &= \underbrace{c_{34} \cap c_{35} \cap c_{25}}_{\subset E_2=c_{14}} \cap \underbrace{c_{16} \cap c_{46}}_{\subset Q_2} = D_{146}.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Wir sind also in der Situation $\bar{e} = -\frac{1}{3}$ vom Beweis des Satzes 4.9 (s. (4.1) und die darauf folgenden Zeilen), so daß wir wissen: $S = E_1 \cdot Q_1 = -3(a+d) \cdot (a+c)(c+d)$, wobei $\{a+d=0\} = c_{56}$. Führen wir die dortigen Rechnungen für den Fall, daß P_1 und P_4 übereinander liegen (bzw. entsprechend P_2, P_3, P_5, P_6 auf einer Geraden liegen), erhalten wir: $S = E_2 \cdot Q_2 = -3(a+c) \cdot (a+d)(c+d)$, wobei $\{a+c=0\} = c_{14}$. Da außerdem $D_{256} = D_{134}$, $D_{356} = D_{124}$ und $c_{23} \supset \{D_{123}, D_{234}, D_{235}, D_{236}\}$, liegt es nahe zu vermuten, daß $c_{23} = \{c+d=0\}$.

Und tatsächlich gilt zunächst, da $\bar{a} = \bar{d}, \bar{b} = \bar{f}, \bar{c} = \bar{e}, \bar{a} = -(\bar{e} + \bar{f})$, wegen $\bar{e} = -\frac{1}{3}$ außerdem $\bar{f} = 1 + \bar{e} = \frac{2}{3} = -2\bar{e}$ und somit $\bar{a} = -\bar{e} + 2\bar{e} = \bar{e}$:

$$\bar{a} = \bar{c} = \bar{d} = \bar{e} = -\frac{1}{2}\bar{f} = -\frac{1}{2}\bar{b}.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 a + e &= a + \left(\frac{\bar{e} - \bar{a}}{\bar{f} - \bar{e}} - 1\right)a + \left(\frac{\bar{e} - \bar{b}}{\bar{f} - \bar{e}} - 1\right)b + \left(\frac{\bar{e} - \bar{c}}{\bar{f} - \bar{e}} - 1\right)c + \left(\frac{\bar{e} - \bar{d}}{\bar{f} - \bar{e}} - 1\right)d \\
 &= a - a - c - d = -(c + d)
 \end{aligned}$$

und, wie schon oben gesehen, $b + f = 0$, so daß also wirklich gilt (s. Satz 3.15):

$$E_3 := c_{23} = \{c + d = 0\}.$$

Die Konfiguration, die wir erhalten, ist daher völlig symmetrisch in den Paaren $\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 6\}$. Dies wird auch durch die Tatsache bestätigt, daß sich an den Gleichungen nichts ändert, wenn außer P_1 und P_4 auch P_2 und P_3 sowie P_5 und P_6 übereinander liegen, wie wir im Beweis von Satz 4.9 gesehen haben.

Wir erwarten also, daß in jeder der drei Ebenen E_1, E_2, E_3 je ein vollständiges Viereck liegt, allerdings mit der Einschränkung, daß je zwei der sechs Geraden nicht als solche auftreten, da c_{14}, c_{23} und c_{56} jeweils aus einer ganzen Ebene bestehen. Diese Vierecke sind so angeordnet, daß je zwei der Eckpunkte D_{ijk} im Schnitt von zwei der Ebenen E_1, E_2, E_3 liegen.

Im Reellen können wir jedes der Vierecke anschaulich als Grundfläche zweier Pyramiden ansehen, die jeweils einen der weiteren Punkte als Spitze haben. Betrachten wir beispielsweise den Fall, in der eine der beiden den verbleibenden Punkt, etwa P , umschließt, so können wir die Geraden als Kanten von vier Tetraedern ansehen, die jeweils ihre Spitze in P haben (Abb. 4.13 und 4.14). Liegt einer der

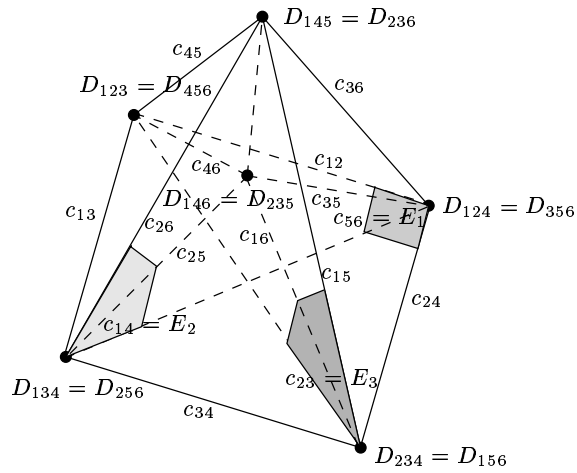


Abbildung 4.13: Die Schnittkonfiguration, wenn die kubische Fläche in die drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 zerfällt.

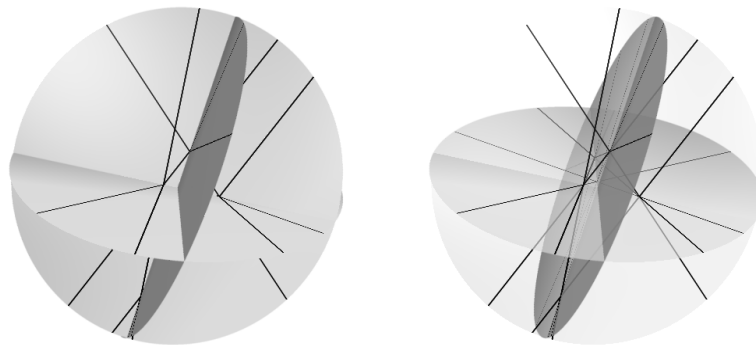


Abbildung 4.14: Die in drei Ebenen zerfallende kubische Fläche und die $3 \cdot 4$ Geraden, von denen sich je vier in einem Punkt treffen.

beiden verbleibenden Punkte „über“, der andere „unter“ einem fixierten vollständigen Viereck, so kann man die Konfiguration als zwei Pyramiden ansehen, die mit den Grundflächen aneinander geklebt sind.

Wie wir in (4.3) und (4.2) gesehen haben, bestehen jetzt alle 30 Tritangentialebenen der Form $\{(\overline{ad} - d_2)(a + d) - (\overline{bf} - d_2)(b + f) = 0\}$ aus dem ganzen \mathbf{P}^3 , so daß die a_i und b_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ also ebenfalls aus dem ganzen \mathbf{P}^3 bestehen. Dies ist auch sinnvoll, da ja alle a_i und b_i durch alle sechs D_{ijk} gehen und diese nicht in einer Ebene liegen.

Als letztes werden wir jetzt noch untersuchen, wie die Gleichung der Fläche, die wir bisher anhängig vom Koeffizient \bar{e} notiert haben, direkt von den Punkt - Koordinaten abhängt, wenn die vier Punkte P_1, \dots, P_4 auf einer Geraden liegen.

Wir können die Koordinaten der sechs Punkte so wählen, daß (in Vektorschreibweise):

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1_y \\ 1 \end{pmatrix}, & P_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2_y \\ 1 \end{pmatrix}, & P_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3_y \\ 1 \end{pmatrix}, \\ P_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4_y \\ 1 \end{pmatrix}, & P_5 &= \begin{pmatrix} 5_x \\ 5_y \\ 5_z \end{pmatrix}, & P_6 &= \begin{pmatrix} 6_x \\ 6_y \\ 6_z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.9 ist

$$6\bar{e} = -(23, 45, 16) - (12, 35, 46) - (13, 24, 56) - (14, 52, 36) + (15, 34, 26).$$

Da alle Determinanten der Form (123), in denen nur die Punkte P_1, \dots, P_4 vorkommen, verschwinden, vereinfacht sich dies zu (s. auch Notation 3.1):

$$6\bar{e} = (236)(451) + (126)(354) + (146)(523) + (152)(346).$$

Betrachten wir nun die einzelnen Summanden:

$$\begin{aligned} (152)(346) &= \det \begin{pmatrix} 0 & 5_x & 0 \\ 1_y & 5_y & 2_y \\ 1 & 5_z & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6_x \\ 3_y & 4_y & 6_y \\ 1 & 1 & 6_z \end{pmatrix} \\ &= -5_x(1_y - 2_y) \cdot 6_x(3_y - 4_y), \\ (145)(236) &= 5_x(1_y - 4_y) \cdot 6_x(2_y - 3_y), \\ (126)(354) &= -5_x(3_y - 4_y) \cdot 6_x(1_y - 2_y), \\ (146)(523) &= 5_x(2_y - 3_y) \cdot 6_x(1_y - 4_y). \end{aligned}$$

$6\bar{e}$ schreibt sich damit um zu:

$$6\bar{e} = 2 \cdot 5_x 6_x \cdot ((1_y - 4_y)(2_y - 3_y) - (1_y - 2_y)(3_y - 4_y)).$$

Normieren wir oBdA. wieder, wie im Beweis von Satz 4.9, durch die Wahl $\bar{f} - \bar{e} = 1$ (d.h. P_1 und P_2 sowie P_3 und P_4 liegen nicht übereinander), so erhalten wir:

$$1 = \bar{f} - \bar{e} = (15, 43, 26) = -(152)(346) = 5_x(1_y - 2_y) \cdot 6_x(3_y - 4_y)$$

und somit (es gilt ja: $1_y \neq 2_y, 3_y \neq 4_y$):

$$5_x 6_x = \frac{1}{(1_y - 2_y)(3_y - 4_y)}.$$

Damit ergibt sich:

$$3\bar{e} = \frac{(1_y - 4_y)(2_y - 3_y)}{(1_y - 2_y)(3_y - 4_y)} - 1.$$

Die Gleichungen von Fläche und Tritangentialebenen hängen also, falls die vier Punkte P_1, \dots, P_4 auf einer Geraden liegen und nicht P_1 und P_2 oder P_3 und P_4 übereinander liegen, nur vom Verhältnis $\frac{(1_y - 4_y)(2_y - 3_y)}{(1_y - 2_y)(3_y - 4_y)}$ ab. Analoges gilt natürlich, wenn wir voraussetzen, daß weder P_1 und P_3 noch P_2 und P_4 übereinander liegen.

4.4 Von Clebsch bis Cayley

Zur Veranschaulichung der Sätze, die in dieser Arbeit vorgestellt wurden, liegen einige Daumenkinos bei, unter anderem auch eines mit dem Titel *Von Clebsch bis Cayley*. Es zeigt, wie sich die Fläche, die Geraden und die parabolische Kurve entwickeln, wenn die sechs Punkte von der Clebsch-Konfiguration in die Cayley-Konfiguration verschoben werden. Dieser Abschnitt dient zur Erläuterung dieser Entwicklungen und gleichsam als Anwendung der in dieser Arbeit vorgestellten Sätze.

4.4.1 Die Diagonalfäche von Clebsch

Wählen wir die Punktconfiguration in der Ebene so, daß fünf Punkte P_1, \dots, P_5 die Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks und der sechste Punkt $P_6 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 P_i$ deren Schwerpunkt ist, so treffen sich in zehn Punkten jeweils drei Geraden in einem Punkt, der nicht einer der sechs ist (s. Abb. 4.15). Die zugehörige kubische Fläche hat also zehn Eckardt-Punkte und ist glatt, da weder drei Punkte auf einer Geraden noch alle sechs auf einer gemeinsamen Konik liegen. In der Abbildung sieht man drei dieser Punkte auf Anhub. Drei weitere liegen in der unendlich fernen Ebene als Schnitt jeweils dreier paralleler Geraden und die restlichen zwei mal zwei Eckardt-Punkte liegen auf der dem Betrachter abgewandten Seite. Die Farbgebung der Geraden ist so gewählt, daß die grünen Geraden die sechs exzeptionellen Geraden a_i darstellen, die sechs blauen die den Koniken entsprechenden b_j und die roten die 15 weiteren Geraden c_{ij} .

4.4.2 Deformationen

Verschieben wir in der Ebene nun beispielsweise den Punkt P_3 auf den Schnittpunkt der Geraden durch die Punkte P_1 und P_4 bzw. P_5 und P_6 , so ergeben

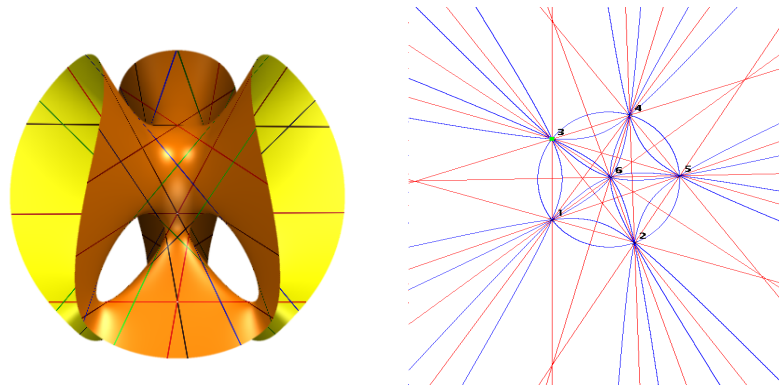


Abbildung 4.15: Die Konfiguration der 6 Punkte für die Diagonalfäche von Clebsch.

sich zweimal je drei Punkte, die auf einer gemeinsamen Geraden liegen, nämlich P_1, P_3, P_4 und P_3, P_5, P_6 . Die zu dieser Konfiguration gehörige Fläche hat also zwei Doppelpunkte nach Satz 4.4 (s. Abb. 4.16).

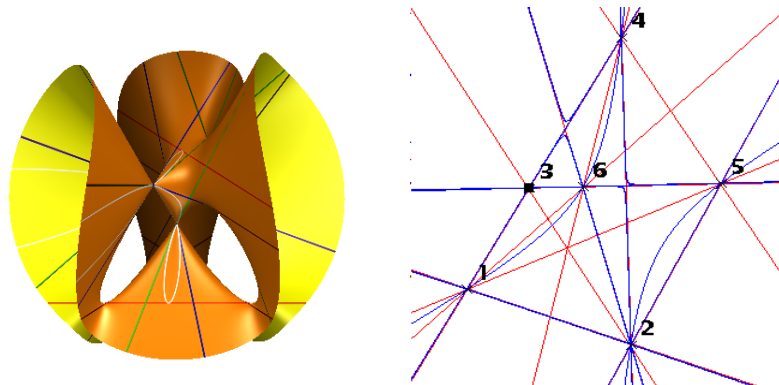


Abbildung 4.16: Der Punkt 3 wurde auf den Schnittpunkt der Geraden 14 und 56 verschoben; es entstehen daher zwei Doppelpunkte.

Um aber noch etwas besser zu verstehen, was alles passiert, während der Punkt P_3 in Richtung auf diese Position wandert, betrachten wir noch zwei der Flächen, die sich ergeben, wenn P_3 noch auf seinem Weg in die neue Position ist (s. Abb. 4.17). Zunächst sehen wir hier, daß zwei der „Hälse“ enger werden – was man ja auch erwartet, schließlich werden dies die Doppelpunkte.

Außerdem ist aber auch interessant, was mit den Geraden passiert, die im Doppelpunkt zusammenfallen werden (s. Satz 4.4). Diese bewegen sich nämlich, wie ebenfalls erwartet, in Paaren aufeinander zu – im Doppelpunkt fallen dann ja sechs mal jeweils zwei übereinander.

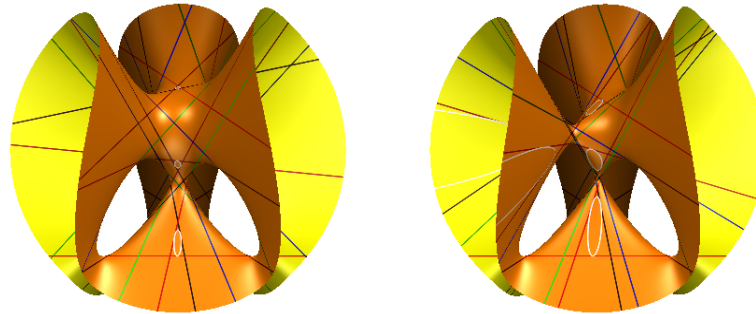


Abbildung 4.17: Der Punkt 3 ist auf dem Weg zum Schnittpunkt der Geraden 14 und 56 verschoben; zwei der 'Hälse' werden schon enger.

Doch dies ist immer noch nicht alles, was wir entdecken können. Wie wir schon in den Ausführungen, die dem Satz 1.5 auf Seite 13 folgen, gesehen haben, sind die Eckardt-Punkte der Diagonalfäche genau die im Reellen liegenden isolierten Punkte der parabolischen Kurve (die hier weiß eingezeichnet ist). Bei der Verschiebung des Punktes lösen sich auch die meisten der Eckardt-Punkte auf und die parabolische Kurve verschwindet in der Umgebung dieser Punkte entweder ganz (im Komplexen) oder wird zu einer kleinen kreisähnlichen Kurve. Letzterer Fall ist in der Abbildung 4.17 gut zu sehen.

Wie des weiteren an eben erwähnter Stelle schon erläutert wurde, berühren die drei Geraden, die sich zuvor im Eckardt-Punkt getroffen haben, nun diesen kreisähnlichen Teil der parabolischen Kurve. Betrachten wir jetzt wieder die Situation, in der die beiden Doppelpunkte vorliegen (Abb. 4.16), so sehen wir, daß sich in jedem Doppelpunkt jeweils zwei kreisähnliche Teile der parabolischen Kurve treffen, daß also der Doppelpunkt selbst im Schnitt der kubischen Fläche mit ihrer Hesseschen liegt (was man nach den Ausführungen im Abschnitt 1.1 sowieso schon hätte wissen können).

Bewegen wir nun den Punkt P_2 auf den Schnittpunkt der ebenen Geraden $(46x)$ und $(25x)$ zu, so passiert im Wesentlichen das eben Beschriebene noch einmal.

4.4.3 Die Cayley Kubik mit vier Doppelpunkten

Im Grenzfall der Kubik mit vier Doppelpunkten gibt es dann nur noch neun verschiedene Geraden. Nur die drei nicht durch Doppelpunkte gehenden roten Geraden zählen einfach; die restlichen sechs jeweils vierfach, da jede dieser Geraden durch zwei Doppelpunkte geht.

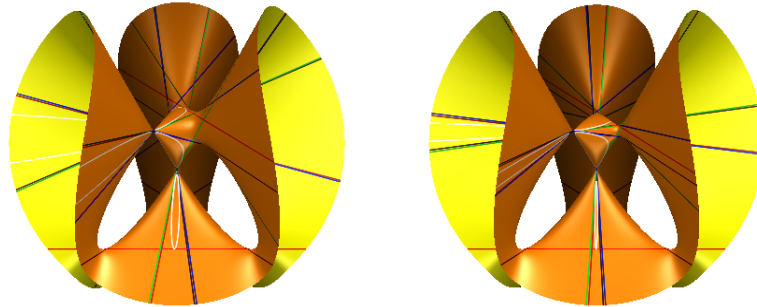


Abbildung 4.18: Der Punkt P_2 ist „auf dem Weg“ zum Schnittpunkt der Geraden $(46x)$ und $(25x)$; die anderen zwei „Hälse“ verengen sich.

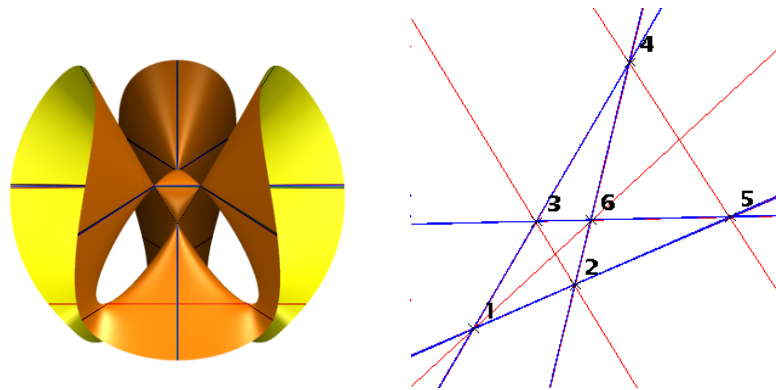


Abbildung 4.19: Vier Mal tritt hier der Fall ein, daß jeweils drei Punkte auf einer Geraden liegen. Die zugehörige kubische Fläche, die Cayley Kubik, hat daher vier Doppelpunkte.

Ausblick

Diese Arbeit liefert als wichtigste Ergebnisse durch die Sätze über explizite Gleichungen in Cobles Hexaederform die Grundlage für das *Cubic Surface Program* und für das detailgenaue Studium der Geraden auf kubischen Flächen, die in dieser Form vorliegen. Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, ergeben sich beispielsweise bei zerfallenden kubischen Flächen interessante Konfigurationen von Geraden auf ihnen, die wohl bisher noch nicht untersucht worden sind, obwohl die Ergebnisse so schön und auch anschaulich gut zu verstehen sind.

Außerdem habe ich versucht, einen knappen aber anschaulichen Überblick über kubische Flächen zu geben, indem ich die im letzten Jahrhundert benutzten Techniken und Ideen erläutert habe. Viele Literaturverweise und die durch Stichpunkte ergänzte Bibliographie erlauben es, sich gut in den wichtigsten Originalartikeln zum Thema zurechtzufinden, so daß dem Leser ein schneller, zielgerichteter Einstieg in die verschiedenen Aspekte der Theorie der kubischen Flächen möglich ist. Mit Hilfe des Programmes kann man dann die in diesen Artikeln sowie im 1., 2. und 4. Kapitel dieser Arbeit vorgestellten Sätze anschaulich nachvollziehen und vielleicht sogar weitere interessante Tatsachen beobachten und zu verstehen versuchen – wie ich bei den zerfallenden kubischen Flächen. Beispielsweise fiel mir noch auf, daß, wenn einer der sechs Punkte der reellen Ebene über den Schnittpunkt zweier Geraden „hinwegläuft“, Geradenpaare, deren Geraden im Doppelpunkt übereinander liegen, die Lage tauschen.

In dem Programm, das übrigens hauptsächlich auf den Sätzen 3.14, 3.15, 3.16 und 3.20 basiert, kann man mit der Maus die Punkte verschieben und dabei die sich verändernden kubischen Flächen betrachten. Wie schon in der Arbeit angedeutet, erhält man, wenn die Koordinaten der sechs Punkte reell sind, nur Flächen, deren Geraden ebenfalls alle reell sind; es wäre also eine interessante und nicht sehr aufwendige Aufgabe, das Programm so zu erweitern, daß es mit komplexen Punkten arbeiten kann (allerdings ist dann natürlich die Konfiguration in der Ebene nicht mehr so einfach und übersichtlich darstellbar). Außerdem wäre eine Erweiterung sinnvoll, die, ausgehend von den sechs Koeffizienten der Cobleschen Hexaederform, die Flächen, Geraden und Tritangentialebenen berechnet und zeichnet (durch Ausnutzung von Satz 3.20).

Wie schon in Abschnitt 3.4 erwähnt wurde, könnte man die expliziten Gleichungen der Erzeuger des Linearsystems aller Kubiken durch die sechs Punkte auch nutzen,

um aus einer Triangulierung der Ebene eine Triangulierung der kubischen Fläche zu erhalten. Eine solche könnte man in ein 3D-Betrachtungsprogramm eingeben und so die Fläche beliebig drehen sowie Geraden oder Ebenen ein- und ausblenden, ohne daß jedesmal das Bild neu berechnet werden müßte (dies ist nämlich beim *Cubic Surface Program* nötig).

Für alle bisher angesprochenen Erweiterungen kann man die in dieser Arbeit besprochenen Sätze verwenden. Coble gibt in [Cob, 1915, S. 194-198] aber außerdem explizit an, wie man zu einer gegebenen Gleichung einer kubischen Fläche in Hexaederform die sechs Punkte der Ebene berechnen kann, in denen man die Ebene aufblasen muß, um die Fläche zu erhalten. Vor allem für Gleichungen mit nicht – reellen oder nicht speziellen Hexaeder – Koeffizienten \bar{a}, \dots, \bar{f} , ist das interessant, da man sich in diesen Fällen die Konfiguration der sechs Punkte nicht relativ schnell mit Hilfe der Anzahl der Eckardt- und Doppelpunkte überlegen kann.

Alle angesprochenen Erweiterungsmöglichkeiten des Programmes habe ich schon implementiert; allerdings ist das Programm erstens noch fehlerhaft und zweitens habe ich die Programmiersprache *C++*, nicht *Java* genutzt, so daß das Programm nicht direkt auf einer Homepage einzusetzen ist.

Wie sieht es aber mit dem umgekehrten Problem aus: Wie lautet für eine beliebige gegebene Gleichung einer kubischen Fläche die Hexaederform? Diese Frage führt, wie im Abschnitt über die Gruppe der 27 Geraden erläutert wurde, auf eine Gleichung vom Grad 27. Mit Hilfe moderner numerischer Methoden ist es möglich, diese Gleichungen in Bruchteilen von Sekunden zu lösen. Die Implementierung eines solchen Programmes wäre im Zusammenhang mit dieser Arbeit interessant, da dadurch der zur hier vorgestellten Theorie umgekehrte Weg gelöst und somit der Kreis geschlossen wäre.

Anhang A

Der Satz von Bézout

Der Satz von Bézout ist in einer verallgemeinerten Form die Grundlage für die Beweise nahezu aller Eigenschaften, die wir in dieser Arbeit über kubische Flächen vorstellen, da die meisten nämlich Aussagen über Anzahlen gewisser Schnittkurven algebraischer Flächen sind.

In diesem Abschnitt werden wir diesen Satz zwar nicht beweisen, dafür aber die für uns interessanten Spezialfälle näher betrachten und anhand von Graphiken erläutern. Doch zunächst die allgemeine Version des Satzes; Bézout selbst lieferte den ersten Beweis für den Spezialfall des Schnittes zweier Kurven in der Ebene.

Satz A.1 (verallgemeinerter Satz von Bézout)

Sei $X \in \mathbf{P}^n$ eine irreduzible algebraische Varietät und $Y \subset \mathbf{P}^n$ eine Hyperfläche mit $I(Y) = (f) \subset P = \mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$. Wir setzen weiter voraus, daß $\dim(X \cap Y) = \dim(X) - 1$. Dann gilt:

$$\deg(X) \cdot \deg(Y) = \sum_{\substack{Z \subset X \cap Y \text{ irreduzibel} \\ \dim(Z) = \dim(X) - 1}} I(X, Y; Z) \cdot \deg(Z).$$

Die Schnittmultiplizität $I(X, Y; Z)$ ist hierbei folgendermaßen definiert:

$$I(X, Y; Z) := \dim_{\mathbf{C}(Z)}(P/(I(X), I(Y)))_{\mathfrak{p}},$$

wobei \mathfrak{p} das Primideal $I(Z)$ ist.

Beweis: Siehe [Har, 1977], Theorem 7.7 im einführenden Kapitel über Varietäten.
□

Für uns sind zwei Spezialfälle interessant. Im \mathbf{P}^2 erhält man:

Korrolar A.2 (Satz von Bézout)

Für zwei ebene algebraische Kurven $C, D \in \mathbf{P}^2$, die keine Komponente gemeinsam haben, gilt:

$$\deg(C) \cdot \deg(D) = \sum_{p \in C \cap D} I(C, D; p).$$

Man hat also beispielsweise (natürlich mit entsprechenden Multiplizitäten gezählt):

- Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.
- Eine Gerade schneidet eine Konik (einen Kegelschnitt) in genau 2 Punkten (Abb. A.1a und A.1b) - wenn die Gerade nicht komplett in ihr enthalten ist, was aber nur für zu einem Geradenpaar degenerierte Kegelschnitte vorkommen kann.
- Zwei Kubiken, die keine Komponente gemeinsam haben, schneiden sich in genau 9 Punkten (Abb. A.1c).

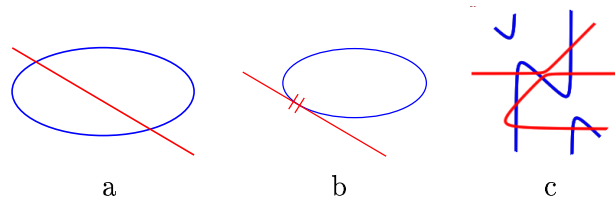


Abbildung A.1: Anzahl der Schnittpunkte von Kurven in der Ebene

□

Im \mathbf{P}^3 interessieren uns hier nur Flächen niedrigen Grades:

Korrolar A.3

- Zwei verschiedene Ebenen im \mathbf{P}^3 schneiden sich in genau einer Geraden.
- Eine Ebene schneidet eine kubische Fläche - falls sie nicht komplett in ihr enthalten ist, was natürlich nur bei degenerierten Flächen vorkommen kann, - in genau einer ebenen Kubik. Da eine solche aber mehrere Komponenten haben kann, besteht der Schnitt entweder aus
 - einer irreduziblen Kubik (Abb. A.2a),
 - einer Konik und einer Geraden (Abb. A.2b) oder
 - drei Geraden (Abb. A.2c); in diesem besonderen Fall heißt die Ebene Tritangentialebene.
- Die Anzahl der Schnittpunkte einer Fläche mit einer Geraden, die nicht in ihr liegt, liefert den Grad der Fläche.

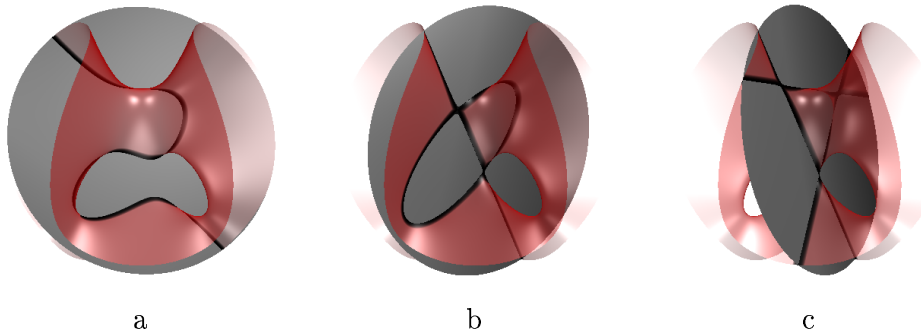


Abbildung A.2: Schnitte einer Ebene mit einer kubischen Fläche

- Die Anzahl der Schnittpunkte einer Ebene mit einer Kurve, die nicht komplett in ihr liegt, liefert den Grad der Kurve.

□

Bibliographie

- [Aro, 1858] S. Aronhold. **Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen.** Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LV: S. 97–191, 1858. *Invariantentheorie, symbolische Notation.*
- [Aro, 1863] S. Aronhold. **Über eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie.** Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LXII: S. 281–345, 1863.
- [Bou, 1968] N. Bourbaki. **Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4,5,6.** Nr. XXXIV in: *Éléments de mathématique.* Hermann, Paris, 1968. *Coxeter-Gruppen und Tits-Systeme, von Reflexionen erzeugte Gruppen, Wurzel-Systeme. Sehr umfangreich. Speziell: Weyl-Gruppen von Wurzel-Systemen (bsp. $W(E_6)$); Coxeter-Graphen, Dynkin-Graphen, Klassifikation der Wurzel-Systeme (schöne Übersicht am Ende).*
- [Cay, 1849] A. Cayley. **On the triple tangent planes to a surface of the third order.** Camb. and Dublin Math. Journal, IV: S. 118–132, 1849. *In Verbindung mit [Sal, 1849]. Ergebnisse des Briefwechsels mit Salmon: Auf einer glatten kubischen Fläche liegen genau 27 Geraden.*
- [Cay, 1869] A. Cayley. **A Memoir on Cubic Surfaces.** Philos. Trans. Royal Soc., CLIX: S. 231–326, 1869. *Klassifikation der kubischen Flächen nach ihren Singularitäten in 23 Typen. Basiert auf und ergänzt [Sch, 1863a].*
- [CG, 1873] A. Clebsch und Gordan. **Über cubische ternäre Formen.** Mathematische Annalen, VI: S. 436–512, 1873. §1: *aus binären cubischen Formen ternäre bilden (Anwendung von Th. X aus [Cle, 1861a]).*
- [Cle, 1861a] A. Clebsch. **Über symbolische Darstellung algebraischer Formen.** Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LIX: S. 1–62, 1861. *Symbolische Notation, Transferenz Prinzip (S. 30: Theorem X und Erläuterungen).*

- [Cle, 1861b] A. Clebsch. **Ueber die Knotenpunkte der Hesseschen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung.** Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LIX: S. 193–228, 1861. *Grundsätzliches zur Hessefläche. Deren Verallgemeinerung auf Flächen vom Grad n ist vom Grad $4(n-2)$ und hat $10(n-2)^3$ Knotenpunkte. Beweis, daß die Gleichung einer kubischen Fläche in Pentaederform geschrieben werden kann.*
- [Cle, 1861c] A. Clebsch. **Zur Theorie der algebraischen Flächen.** Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LIIX: S. 93–108, 1861. *Explizite Gleichung einer Covariante neunter Ordnung, deren Schnitt mit einer kubischen Fläche aus den 27 Geraden besteht.*
- [Cle, 1864] A. Clebsch. **Zur Theorie der algebraischen Flächen.** Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LXIII: S. 14–26, 1864. *Flächensystem der Ordnung $8n-14$ durch Punkte, in denen 2 Geraden 4-punktig berühren. Für kubische Flächen liefert der Schnitt der 27 Geraden mit einer dieser Flächen die 135 Schnittpunkte der Geraden untereinander.*
- [Cle, 1866] A. Clebsch. **Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung.** Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LXV: S. 359–380, 1866. *Jede kubische Fläche entsteht durch Aufblasen des \mathbf{P}^2 in 6 Punkten. Behandlung des Linearsystems der ebenen Kubiken durch 6 Punkte. Betrachtung des Spezialfalls, in dem alle Punkte auf einer Konik liegen. Basiert auf [Sch, 1863b].*
- [Cle, 1871] A. Clebsch. **Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5ten Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits.** Math. Ann., IV: S. 284–345, 1871. *§§16-18: über die Diagonalfäche; im Zusammenhang mit der Auflösung einer Gleichung fünften Grades.*
- [CLO, 1997] D. Cox, J. Little, und D. O’Shea. **Ideals, Varieties, and Algorithms.** Springer-Verlag, New York, 2. Auflage, 1997. *Eine gut zu lesende, ausführliche und anwendungsbezogene Einführung ins Thema. Ein Schwerpunkt liegt auf konkreten Berechnungen, daher beispielsweise ein umfangreiches Kapitel zu Gröbnerbasen.*
- [CLO, 1998] D. Cox, J. Little, und D. O’Shea. **Using Algebraic Geometry.** Springer-Verlag, New York, 1998. *Anwendung der in [CLO, 1997] dargestellten Theorie auf Robotik, Codierungstheorie, Integer-Programmierung etc.*

- [Cob, 1915] A. B. Coble. **Point sets and allied Cremona Groups**. Transactions of the American Mathematical Society, XVI: S. 155–198, 1915. *Anwendung auf kubische Flächen: explizite Gleichungen der Fläche und der Tritangentialebenen, ausgehend von 6 Punkten im \mathbf{P}^2 und umgekehrt: Berechnung der 6 Punkte aus einer gegebenen Hexaederform der Fläche.*
- [Con, 1985] J. H. Conway. **Atlas of finite groups**. Clarendon Press, Oxford, 1985. *Die wichtigsten Informationen zu allen endlichen einfachen Gruppen. Speziell: Verschiedene Konstruktionen von $U_4(2) \simeq S_4(3)$, der einfachen Index-2-Untergruppe von $W(E_6)$ (der Gruppe der Inzidenz-erhaltenden Permutationen der 27 Geraden einer kubischen Fläche).*
- [Cre, 1868] Cremona. **Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre**. Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LXVIII: S. 1–133, 1868. *Beweis der Sätze aus [Ste, 1857] und einiges mehr.*
- [Dic, 1901] Dickson. **Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory**. B. G. Teubner, Leipzig, 1901. *Gruppen allgemein, ausführliche Behandlung der Automorphismengruppe der 27 Geraden (Kap. XIV: S. 303-307) und deren einfacher Index-2-Untergruppe (§§270-275: S. 292-298).*
- [DO, 1988] I. Dolgachev und D. Ortland. **Point sets in projective spaces and theta functions**. Astérisque 165. Société Mathématique de France, 1988. *Darstellung der hauptsächlich auf Coble basierenden Theorie in einer für den modernen Mathematiker verständlichen Sprache. Z.B. Blowing-Up of point sets. Beispiel: Kubische Flächen.*
- [Fis, 1986] G. Fischer. **Mathematische Modelle / Mathematical Models**. Vieweg, 1986. Bildband und Kommentarband. *Photos vieler Gips-Modelle der Rodenberg-Serie. Beziehung zwischen Coxeterdiagrammen und Singularitäten, die durch „Zusammenziehen“ der Durchgänge entstehen. Knappe Übersicht, gute Literaturangaben.*
- [Fis, 1994] G. Fischer. **Ebene algebraische Kurven**. Vieweg, 1994. *Tangenten, Singularitäten, Polare, Hesse-Kurve, Duale Kurve etc.*
- [FM, 2000] R. Friedman und J. W. Morgan. **Exceptional Groups and del Pezzo Surfaces**. math.AG / 0009155, 2000.
- [Gei, 1870] Geiser. **Über die Steinerschen Sätze von den Doppeltangenten der Curven vierten Grades**. Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LXXII: S. 370–378, 1870. *Insbesondere Abschnitt V: Kurve vierten Grades als Projektion einer kubischen Fläche S von einem Punkt $P \in S$ auf eine Ebene E . Die 28 Bitangenten sind dann die 27 Bilder der*

- 27 Geraden auf S und die letzte Gerade ist der Schnitt der Tangentialebene in P mit E .*
- [GH, 1994] P. Griffith und J. Harris. **Principles of Algebraic Geometry**. Wiley Classics Library, 1994. *Auch spezielle Behandlung kubischer Flächen, z.B. S. 489: jede glatte kub. Fl. erhält man durch Blow-Up des \mathbf{P}^2 in 6 Punkten allgemeiner Lage; S. 636-640: kubische Flächen mit gewöhnlichen Doppelpunkten als Blow-Up des \mathbf{P}^2 in 6 Punkten spezieller Lage.*
- [Gra, 1855] H. Graßmann. **Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades, und die dadurch erzeugten Oberflächen**. Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), IL: S. 47–65, 1855. *Beispielsweise §5: Die Oberfläche dritter Ordnung als Durchschnitt dreier projectivischer Bündel.*
- [Har, 1977] R. Hartshorne. **Algebraic Geometry**. Springer-Verlag New York Inc., 1977.
- [HCV, 1932] D. Hilbert und S. Cohn-Vossen. **Anschauliche Geometrie**. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1932. *Wirklich sehr anschaulich. Bsp.: Schläflis Doppel-Sechs auf Würfelseiten (§25) oder: Die Krümmung auf Flächen (§§28,29).*
- [Hen, 1911] A. Henderson. **The Twenty-Seven Lines upon the Cubic Surface**. Hafner Publishing Co., 1911.
- [Hun, 1996] B. Hunt. **The Geometry of some special Arithmetic Quotients**. Springer Verlag, 1996. .
- [Jor, 1869] C. Jordan. **Sur les équations de la géométrie**. Comptes Rendus, LXVIII: S. 656–659, 1869. *Beziehung zwischen der Galoisgruppe der Gleichung der 27 Geraden auf einer kubischen Fläche und der Gleichung der 28 Doppel-Tangenten an eine Kurve vierter Ordnung.*
- [Jor, 1957] C. Jordan. **Traité des Substitutions et des Equations Algébriques**. Gaultiers-Villars, Paris, 1957. Neuauflage (Original v. 1869). *Vieles zum Thema. Beispielsweise der erste Beweis, daß die Lösungen der Gleichung, von der die 27 Geraden abhängen, nicht durch Gleichungen vom Grad kleiner 27 gefunden werden können.*
- [Kae, 1999] R. Kaenders. **Die Diagonalfäche aus Keramik**. DMV-Mitteilungen, 4/99, 1999. *Über die Erstellung und mathematische Hintergründe zum Keramikmodell der Clebschfläche in Düsseldorf.*
- [Kle, 1873] F. Klein. **Über Flächen dritter Ordnung**. Math. Annalen, VI: S. 551–581 und Tafeln I–VI, 1873. Auch in: [Kle, 1922], S. 11-62. *Bes. interessant: Ableitung neuer Flächen aus der Fläche mit vier reellen Knoten. Ableitung des biplanaren Knoten aus dem konischen etc.*

- [Kle, 1922] F. Klein. **Gesammelte Mathematische Abhandlungen**, Band II. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1922. *Enthält z.B. [Kle, 1873] inkl. zweier Zusätze. Auch die Vorbemerkungen zu den Arbeiten über anschauliche Geometrie (S. 3-6) sind lesenswert.*
- [Kle, 1926] F. Klein. **Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert**, Band I. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1926. *Sehr schön und anschaulich geschrieben. Siehe beispielsweise S. 122 zum Beweis Plückers des Pascalschen Satzes (Benutzung des „Plückerschen μ “). Auch viel Biographisches und Persönliches zu den Mathematikern dieses Jahrhunderts.*
- [KM, 1987] H. Knörrer und T. Miller. **Topologische Typen reeller kubischer Flächen**. Mathematische Zeitschrift, 195, 1987. *Geraden auf reellen kubischen Flächen; Topologie r. kub. Fl.; Klassifikation; Auflistung aller Typen.*
- [Kun, 1994] E. Kunz. **Algebra**. Vieweg, Braunschweig, 2. Auflage, 1994.
- [Kun, 1997] E. Kunz. **Einführung in die algebraische Geometrie**. Vieweg, Braunschweig, 1997.
- [Lab, 2001a] O. Labs. **Dokumentation des *Cubic Surface Programs***. <http://enriques.mathematik.uni-mainz.de/csh/playing/docu.html>, 2001. *Dokumentation des Programmes auf der Seite [vSL, 2000].*
- [Lab, 2001b] O. Labs. **Singular-Skript zur Diplomarbeit**. <http://enriques.mathematik.uni-mainz.de/~olila/diplomarbeit/explicite>, 2001. *Das Skript stellt alle im 3. Kapitel dieser Arbeit eingeführten Notationen bereit, so daß Berechnungen damit leicht möglich sind.*
- [Man, 1974] Y. I. Manin. **Cubic Forms - Algebra, Geometry, Arithmetic**. North-Holland Publishing Company, 1974. *Moderne Behandlung kubischer Flächen; viele Resultate allgemein für del Pezzo Flächen formuliert, beispielsweise §25: Picard-Gruppe und Wurzel-Systeme, §26: exzeptionelle Kurven und Weyl-Gruppen.*
- [Pas, 1922] E. Pascal. **Repetitorium der höheren Mathematik**, Band II: Geometrie, 2. Hälfte: Raumgeometrie. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 2. Auflage, 1922. *Insbes. Kap. XXXIV: Flächen dritter Ordnung v. L. Berzolari (S. 783-849); dies ist im Wesentlichen eine umfangreiche Bibliographie in Prosa-Form.*
- [PT, 2000] E. Peyre und Y. Tschinkel. **Tamagawa Numbers of Diagonal Cubic Surfaces of Higher Rank**. math.AG / 0009092, 2000.

- [Rei, 1988] M. Reid. **Undergraduate Algebraic Geometry**. Cambridge University Press, 1988. *Leicht verständliche erste Einführung ins Thema. Ein strikter Beweis für die Existenz einer Geraden auf einer kubischen Fläche. Ermittlung der Inzidenzrelationen der 27 Geraden.*
- [Rod, 1879] C. Rodenberg. **Zur Classification der Flächen dritter Ordnung**. Math. Ann., XIV, 1879. *Ermittlung der kubischen Fläche zu einem gegebenen Pentaeder.*
- [Rod, 1904] C. Rodenberg. **Modelle von Flächen dritter Ordnung**, in: [Sch, 1904]. 1904. *Erläuterungen zu den vom Autor selbst erstellten Gipsmodellen (s. [Sch, 1911]).*
- [Sal, 1849] G. Salmon. **On the triple tangent planes to a surface of the third order**. Camb. and Dublin Math. Journal, IV: S. 252–260, 1849. *In Verbindung mit [Cay, 1849]. Ergebnisse des Briefwechsels mit Cayley: Auf einer glatten kubischen Fläche liegen genau 27 Geraden.*
- [Sal, 1879] G. Salmon. **Analytische Geometrie des Raumes**, Band I. B. G. Teubner, Leipzig, 3. Auflage, 1879. *Als Einführung zu [Sal, 1880] lesenswert. Hauptsächlich zwar über Flächen zweiten Grades, aber Einführung einiger Konzepte (z.B. Polare, Dualität (Reziprocalfläche)).*
- [Sal, 1880] G. Salmon. **Analytische Geometrie des Raumes**, Band II. B. G. Teubner, Leipzig, 3. Auflage, 1880. *Unbedingt lesenswert. Sehr anschaulich, daher aber teilweise nicht ganz exakt geschrieben und begründet. Insbes. Kap. 1 (Allg. Theorie der Flächen, insbes. S. 1-33: Polaren, Hessesche, Reziprocalfläche, ...) und Kap. 5 (Von den Flächen dritter Ordnung). Sehr umfangreich und informativ.*
- [Sch, 1858] L. Schläfli. **An attempt to determine the twenty-seven Lines upon a Surface of the third Order, and to divide such Surfaces into Species in Reference to the Reality of the Lines upon the Surface**. Quarterly Journal for pure and applied Mathematics, II: S. 55–66, S. 110–220, 1858. (auch in: [Sch, 1953]: S. 198-218). *Fünf Klassen von kubischen Flächen, je nach Realität der Geraden. Entdeckung der Doppel-Sechs und Einführung dieser Notation.*
- [Sch, 1863a] L. Schläfli. **On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species, in reference to the presence or absence of Singular Points and the reality of their Lines**. Philos. Trans. Royal Soc., CLIII: S. 193–241, 1863. (auch in: [Sch, 1953]: S. 304-362). *Erste Klassifikation der kubischen Flächen in 23 Typen, abhängig von den Singularitäten.*

- [Sch, 1863b] H. Schröter. **Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung.** Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LXII: S. 265–280, 1863. *Basiert auf [Gra, 1855, §5].*
- [Sch, 1904] M. Schilling, Hrsg. **Mathematische Abhandlungen aus dem Verlage Mathematischer Modelle von Martin Schilling.** Schilling, Halle a. d. Saale, 1904. *Enthält: Abhandlungen zu den Serien 1-23; mit 71 Figuren auf 6 Tafeln und im Text, z.B. [Rod, 1904].*
- [Sch, 1911] M. Schilling. **Catalog mathematischer Modelle für den höheren Mathematikunterricht.** Verlag von Martin Schilling, Leipzig, 1911. *Der Verlag verkaufte damals reale, physische Modelle mathematischer Flächen (aus Gips u.ä.). Der Katalog besteht aus einer Preisliste und kurzen Erläuterungen (im Falle der Rodenberg-Serie aber keine Gleichungen) zu den Flächen im Stil: 'entsteht aus ... durch Zusammenziehen der Hülse'.*
- [Sch, 1953] L. Schläfli. **Gesammelte Mathematische Abhandlungen,** Band II. Verlag Birkhäuser, Basel, 1953. *Enthält [Sch, 1858] und [Sch, 1863a] über die Klassifikation der kubischen Flächen.*
- [Seg, 1942] B. Segre. **The non-singular Cubic Surfaces.** Clarendon, Oxford, 1942. *Interessante ebene Darstellung der 27 Geraden: als Grenzgeraden, wenn die glatte kubische Fläche gegen eine in drei Ebenen degenerierte konvergiert. Damit werden die Gruppe der 27 Geraden, reelle kubische Flächen und der Sylvestersche Pentaeder studiert.*
- [Ser, 1966] J.-P. Serre. **Algèbres de Lie semi-simples complexes.** Benjamin, New York, 1966. *Kap. V: Wurzelsysteme, deren Weyl-Gruppe, Coxeter-Graphen, Dynkin-Graphen.*
- [Ste, 1857] Steiner. **Über die Flächen dritten Grades.** Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LIII, 1857. *Formulierung vieler neuer Sätze und Ideen, ohne Angabe von Beweisen. Ausgangspunkt für die Forschung der folgenden Jahre. Viele Beziehungen zwischen Polare, „Kernfläche“, Geraden, Tritangentialebene etc. Beweise in [Cre, 1868] und [Stu, 1867].*
- [Stu, 1867] R. Sturm. **Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung.** B. G. Teubner, Leipzig, 1867. *Beweis der Sätze aus [Ste, 1857] und vieles mehr.*
- [Suz, 1982] M. Suzuki. **Group Theory,** Band I. Springer, Berlin, 1982. *Gruppentheorie. Speziell S. 310-370: Weyl-Gruppen, Coxeter-Gruppen, allerdings nichts über Weyl-Gruppen von Wurzelsystemen (dazu: [Bou, 1968]). Überblick über die endlichen einfachen Gruppen.*

- [Syl, 1851] Sylvester. **Sketch of a memoire on elimination, transformation and canonical forms.** Cambridge and Dublin Math. Journal, VI: S. 186–200, 1851. *Erstmalige Formulierung der Behauptung, daß eine kubische Fläche sich in Pentaederform bringen läßt, Beweis in [Cle, 1861b].*
- [vSL, 2000] D. van Straten und O. Labs. **The Cubic Surface Homepage.** <http://enriques.mathematik.uni-mainz.de/csh/>. Arbeitsgruppe Algebraische Geometrie an der Joh. Gutenberg Universität Mainz, 2000. *Viele Informationen, Bilder, Filme zu kubischen Flächen. Interaktives Kennenlernen der Flächen.*

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt habe und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Mainz, im Januar 2001,

Oliver Labs