

**INQUELLO Gaëlle**

# **LA SURFACE DE VERONESE**

## **Projet de licence de mathématiques**

**Responsable : Jean VALLES**

**UNIVERSITE DE VERSAILLES SAINT-QUENTIN**

**Mai 2001**

---

# SOMMAIRE

---

Avant-propos

Giuseppe Veronese (1854-1917)

Etude sur la **surface de Veronese** :

- a) Formes quadratiques de rang 1
- b) Droite des formes linéaires
- c) Plongement de  $\mathbf{P}_2(\mathbf{K})$  dans  $\mathbf{P}_5(\mathbf{K})$
- d) Paramétrage des matrices nilpotentes de rang 1
- e) Plongement de la **surface de Veronese** dans  $\mathbf{P}_4(\mathbf{K})$
- f) Extension pour tout  $n$
- g) Hyperplan de matrices symétriques complexes

Conclusion

Bibliographie

# AVANT-PROPOS

Dans l'antiquité, les géomètres grecs utilisaient les projections afin d'obtenir de nouvelles propriétés des figures.

Mais à la Renaissance, **DESARGUES** (1591-1661) le premier, recherchant une méthode géométrique universelle, a essayé d'éviter ce détour par l'espace. L'observation de la ligne de fuite de la perspective l'a amené à considérer les parallèles comme des droites qui se coupent à l'infini, en un point non représentable mais considéré comme un point usuel. Il travaillait alors dans un nouveau plan constitué par un plan ordinaire, complété par la droite de l'infini.

Ce modèle de plan projectif montra vite ses limites, en particulier parce qu'il utilisait encore d'anciennes notions. Il n'était pas apte à recevoir les nouvelles idées qui allaient apparaître au XIXème siècle. Celles-ci rattacheront les propriétés des figures à des structures algébriques et spécialement, à des groupes de transformations.

En effet au XIXème, de nouvelles théories mathématiques voient le jour. C'est au cours de cette période, que les mathématiciens sont amenés à concevoir quantités d'êtres abstraits : espaces de dimension arbitraire, structures algébriques et topologiques variées. Cependant, les notions de base restent omniprésentes car sans elles, les résultats nouveaux ne peuvent acquérir toute leur ampleur. De plus, on porte une attention particulière aux modes de raisonnement. C'est ainsi qu'à la fin du siècle, toutes les théories des mathématiques actuelles ont été dégagées.

Notre étude portera sur une surface particulière, révélée par **VERONESE** (1854-1917). Sa propriété majeure est de remplir tout l'espace. Nous utiliserons l'algèbre linéaire ou bilinéaire, outil le plus commode pour définir proprement le plan projectif et ses transformations.

# GIUSEPPE VERONESE

**Giuseppe Véronèse** est né en 1854 à Chioggia, petit village près de Venise, d'un père peintre en bâtiment et d'une mère, **Eléonore Duse**, actrice célèbre. Cependant, le couple n'avait pas les moyens de financer des études universitaires à Giuseppe. En 1872, âgé de 18 ans, **Véronèse** abandonna sa scolarité pour trouver du travail à Vienne.

Il eut la chance l'année suivante, de rencontrer le **Comte Nicolas Papadopoli**, qui devint son mécène. Il put reprendre ses études et s'inscrire à l'Ecole Polytechnique de Zurich. Puis, il commença à rédiger une publication sur l'hexagramme de Pascal et se mit à correspondre avec **Crémone**, de l'Université de Rome. Celui-ci lui conseilla de le rejoindre, pour y poursuivre ses études.

En 1876, **Véronèse** se retrouva employé comme assistant en géométrie analytique, suite à la pertinence de sa publication sur l'hexagramme de **Pascal**. Il obtint son diplôme à Rome en 1877 et il continua d'étudier pour soutenir un doctorat.

En Novembre 1880, **Bellavitis**, professeur à Padoue, mourut. Sa chaire de géométrie algébrique devint vacante. **Véronèse** remporta le concours qui lui permit d'en devenir titulaire à partir de 1881. Il l'occupa durant toute sa vie.

**Véronèse** développa une approche très originale de la géométrie projective en grandes dimensions, basée sur la suprématie de techniques de géométrie intuitive par rapport aux points de vue algébriques et analytiques. Il influença grandement l'école de géométrie d'Italie pendant de nombreuses années. **Castelnuovo**, l'un des plus grands mathématiciens en géométrie algébrique, fut son élève au milieu des années 1880.

Il inventa les géométries non-archimédiennes qu'il proposa aux alentours de 1890. Cependant, **Péano** critiqua fortement cette notion, en raison du manque de rigueur et de justifications de **Véronèse**. Les arguments qui en résultèrent furent extrêmement utiles aux mathématiciens pour clarifier la notion de continuité. Peu après, **Hilbert** démontra la parfaite cohérence des propositions de **Véronèse**.

On peut encore mentionner un ou deux aspects de la vie de **Véronèse**. Il rédigea un grand nombre d'ouvrages scolaires forts utiles pour l'enseignement des mathématiques et il se mit aussi à faire de la politique. Il fut membre actif du Parlement de Chioggia de 1897 à 1900. Et par la suite, il servit comme membre actif du Conseil municipal de Padoue, puis devint Sénateur en 1904. Il le resta jusqu'à sa mort en 1917.

*(\* traduit et résumé par nos soins, d'après la publication de J. O'CONNOR de l'Université de mathématiques de St Andrew, en Ecosse).*

# LA SURFACE DE VERONESE

Soit  $E$ , un espace vectoriel de dimension  $n = 3$  sur un corps algébriquement clos  $\mathbf{K}$ . On note  $Q(E)$  l'espace vectoriel des formes quadratiques sur  $E$ , et  $P(Q(E))$  l'espace projectif qui lui est associé.

- a) Montrer que l'ensemble des formes quadratiques de rang 1 définit dans le projectif une variété fermée, de dimension 2, qu'on appellera la **surface de Véronèse** puis montrons qu'il existe un plongement de  $P(E^*)$  dans  $P(Q(E))$

Soit  $B = \{e_0, e_1, e_2\}$  une base de  $E$ .

Soit  $q$  une forme quadratique de  $Q(E)$ . Par définition, cette forme quadratique est associée à une forme bilinéaire symétrique  $f$ , définie sur  $E$  de matrice  $A$  dans la base  $B$  de  $E$ .

Soit  $M = (X, Y, Z)$  un point de  $E$ . La valeur de  $q(M)$  dans  $B$  est donnée par un polynôme homogène du second degré à trois variables donné par la formule matricielle :

$$(X, Y, Z) A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Soit  $B' = \{u_0, u_1, u_2\}$ , une autre base de  $E$  et  $P$  la matrice de passage de  $B$  dans  $B'$ . La matrice de  $f$  dans cette nouvelle base est  $A' = {}^t P A P$ .

En effet,  $q(e_i) = {}^t e_i A e_i \quad \forall i \in \{0, 1, 2\}$

Or  $e_i = P u_i$  donc  $q(e_i) = q(P u_i) = {}^t (P u_i) A P u_i = {}^t u_i {}^t P A P u_i$ .

Par suite, dans  $B'$ , la matrice associée à  $q$  est bien  ${}^t P A P$ .

L'algèbre peut ici nous aider à résoudre la question.

Par définition, on dit que le groupe  $G$  opère sur l'ensemble  $E$  si l'on définit une loi externe de  $G \times E$  vers  $E$  qui, au couple  $(g, x)$  associe un élément noté  $g.x$  tel que

$$\begin{aligned} g'.(g.x) &= (g' * g).x \\ e.x &= x \end{aligned}$$

Soit  $a$ , un élément de  $E$ . L'ensemble des éléments  $g.a$  est appelé l'orbite de  $a$ . L'orbite de  $a$  est donc l'ensemble des points qui peuvent être atteints à partir de  $a$  quand on fait agir  $G$  sur  $E$ .

Appliquons ces deux définitions à notre problème.

Classer les formes quadratiques sur  $\mathbf{K}$ , revient alors à déterminer les orbites de  $Q(\mathbf{K}^3)$  sous l'action de  $GL(\mathbf{K}^3)$ .

$$\begin{aligned} GL(\mathbf{K}^3) \times Q(\mathbf{K}^3) &\longrightarrow Q(\mathbf{K}^3) \\ GL(E) \times A &\longmapsto A' \\ (P, A) &\longmapsto {}^t P A P \\ (f, q) &\longmapsto f.q = q(f) \end{aligned}$$

Soit la matrice symétrique A associée à q :

$$A = \begin{bmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ X_1 & X_3 & X_4 \\ X_2 & X_4 & X_5 \end{bmatrix}$$

A de rang 1  $\Leftrightarrow$  tous ses 2-mineurs sont nuls.

On obtient 6 polynômes qui s'annulent sur la variété **V**.

$$\begin{cases} X_1^2 - X_0X_3 = 0 \\ X_3X_2 - X_1X_4 = 0 \\ X_1X_2 - X_0X_4 = 0 \\ X_1X_5 - X_2X_4 = 0 \\ X_2^2 - X_0X_5 = 0 \\ X_3X_5 - X_4^2 = 0 \end{cases}$$

Considérons l'application :

$$\psi : Q(E) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^6$$

$$(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \mapsto (X_1^2 - X_0X_3, X_3X_2 - X_1X_4, X_1X_2 - X_0X_4, X_1X_5 - X_2X_4, X_2^2 - X_0X_5, X_3X_5 - X_4^2)$$

$\psi$  est continue,  $\{0,0,0,0,0,0\}$  est un fermé dans  $\mathbb{C}^6$  donc  $\psi^{-1}(\{0,0,0,0,0,0\})$  est un fermé de  $Q(E) \setminus \{0\}$ .

Soit  $\pi$  la projection canonique.

$$\pi(Q(E) \setminus \{0\}) = \mathbf{P}(Q(E)).$$

On a alors :  $\psi^{-1}(\{0,0,0,0,0,0\}) = \pi^{-1}(V)$ .

Par suite, l'image réciproque de **V** par  $\pi$  est fermée dans  $\mathbf{P}(Q(E))$  et  $\pi$  est continue,

**donc V est fermée.**

Montrons maintenant que V est de dimension 2.

Pour cela, on va montrer qu'il existe un plongement de  $\mathbf{P}(E^*)$  dans  $\mathbf{P}(Q(E))$  dont l'image est exactement la surface de Véronèse.

Par définition,  $\dim(\mathbf{P}(Q(E))) = \dim(Q(E)) - 1$ .

Or, E étant isomorphe à  $\mathbb{C}^3$ ,  $Q(E)$  est de dimension 6. Par conséquent  $\dim(\mathbf{P}(Q(E))) = 5$ .

On notera donc par la suite :  $\mathbf{P}(Q(E)) = \mathbf{P}_5$ .

D'autre part, comme on est en dimension finie, E et  $E^*$  sont isomorphes. Donc  $E^*$  est de dimension 3. On en déduit que  $\mathbf{P}(E^*)$  est de dimension 2. On notera donc cet espace  $\mathbf{P}_2$ .

V est définie dans  $\mathbf{P}_5$  par l'ensemble des formes quadratiques de rang 1. Soit donc une forme quadratique q de rang 1.

On sait qu'il existe une base orthogonale pour q dans laquelle la matrice associée à q est diagonale. En appliquant la «décomposition en carrés» de Gauss, on montre alors qu'il existe une application linéaire non nulle  $\phi$  telle que  $q = \phi^2$ .

Par suite, il existe (a, b, c) tels que  $q(x, y, z) = (ax + by + cz)^2$ .

Soit donc  $\phi : E \rightarrow \mathbb{C}$

$$(x, y, z) \mapsto (ax + by + cz)$$

telle que  $q = \phi^2$ .

Nous avons :

$$v: \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_5 \quad \text{est injective}$$

$$\varphi \mapsto q = \varphi^2$$

$$\varphi: E \rightarrow C$$

$$(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$$

d'où :

$$\varphi^2: E \rightarrow C$$

$$(x, y, z) \mapsto a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2cbxz + 2acxz$$

On en déduit que :  $\ker v = \{\varphi \in \mathbf{P}_2 / v(\varphi) = 0\} = \{\varphi \in \mathbf{P}_2 / \varphi^2 = 0\} = \{0\}$

Donc  $v$  est injective.

De plus,  $\forall \varphi \in \mathbf{P}_2$ , la différentielle  $Dv$  de  $v$  est un isomorphisme de  $\mathbf{P}_2$  dans  $\mathbf{P}_5$  car le déterminant de la jacobienne  $J$  de  $v$  est non nul  $\forall \varphi \in \mathbf{P}_2$  :

$$J = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 2c \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

$\text{rang}(J) = 3$  car le rang de la famille de vecteurs colonnes de  $J$  est 3. Donc  $Dv$  est injective.

De plus,  $Dv$  est linéaire et on est en dimension finie donc  $Dv$  est bien un isomorphisme de  $\mathbf{P}_2$  dans  $\mathbf{P}_5$ . On peut donc appliquer la version globale du théorème d'inversion locale et on obtient :  $v$  est un difféomorphisme de  $\mathbf{P}_2$  sur  $v(\mathbf{P}_2)$ .

Or, un difféomorphisme est une bijection et on est en dimension finie donc l'image de  $\mathbf{P}_2$  par  $v$  est de dimension 2.

Comme  $q = \varphi^2$ ,  $q$  est dans  $v(\mathbf{P}_2)$ . Par conséquent,  $V$  étant définie dans le projectif par l'ensemble des formes quadratiques de rang 1, elle est de dimension 2.

Finalement, il existe bien un plongement de  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}(E^*)$  dans  $\mathbf{P}_5 = \mathbf{P}(Q(E))$  dont l'image est exactement la surface de Véronèse  $V$  avec  $V$  fermée dans  $\mathbf{P}_5$  et de dimension 2.

b) Montrer qu'en coordonnées, le plongement précédent de  $\mathbf{P}_2(\mathbf{K})$  dans  $\mathbf{P}_5(\mathbf{K})$  est donné par :

$$(\alpha, \beta, \gamma) \longmapsto \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 \longrightarrow \mathbf{P}_5$$

$$\varphi(z) \longrightarrow (\varphi(z))^2$$

$$\varphi(z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

$$(\varphi(z))^2 = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 + 2\alpha\beta xy + 2\alpha\gamma xz + 2\beta\gamma yz$$

Soit  $q$  une forme quadratique de rang 1. D'après la question précédente, on peut écrire

$$q(z) = (\varphi(z))^2$$

On sait que les éléments de la matrice associée à  $q$  dans la base  $B (e_1, \dots, e_n)$  sont de la forme :

$$\forall i, j \in (\{1, \dots, n\}^2) \quad a_{i,j} = \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_i}(e_j)$$

Ce qui nous donne ici :

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial x} = 2\alpha^2 x + 2\alpha\beta y + 2\alpha\gamma z \\ \frac{\partial q}{\partial y} = 2\alpha\beta x + 2\beta^2 y + 2\beta\gamma z \\ \frac{\partial q}{\partial z} = 2\alpha\gamma x + 2\beta\gamma y + 2\gamma^2 z \end{cases}$$

**On déduit que la matrice de  $q$  dans  $E$  est  $A$  :**

$$A = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{bmatrix}$$

### c) Paramétrer les matrices symétriques nilpotentes de rang 1.

A la question précédente, nous avons paramétré les matrices symétriques de rang 1, sous la forme suivante :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{bmatrix}$$

Pour cela, nous avons effectué un plongement de  $\mathbf{P}_2(\mathbf{K})$  dans  $\mathbf{P}_5(\mathbf{K})$ .

Si l'on restreint  $\mathbf{P}_2(\mathbf{K})$  à l'hyperplan défini par l'équation :  $[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0]$  on remarque alors que l'on a :

$$\left. \begin{array}{l} \text{tr}(A) = 0 \\ \text{rang}(A) = 1 \\ \text{dét}(A) = 0 \end{array} \right\} \quad \mathbf{P} \quad \text{Somme et Produit des valeurs propres sont nuls.}$$

Mais cela ne suffit pas pour savoir si la matrice  $A$  est nilpotente.

Calculons donc  $A^2$  :

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 & \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 + \alpha\beta\gamma^2 & \alpha^3\gamma + \alpha\beta^2\gamma + \alpha\gamma^3 \\ \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 + \alpha\beta\gamma^2 & \alpha^2\beta^2 + \beta^4 + \beta^2\gamma^2 & \alpha^2\beta\gamma + \beta^3\gamma + \beta\gamma^3 \\ \alpha^3\gamma + \alpha\beta^2\gamma + \alpha\gamma^3 & \alpha^2\beta\gamma + \beta^3\gamma + \beta\gamma^3 & \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{U} \quad A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) & \alpha\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) & \alpha\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \\ \alpha\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) & \beta^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) & \beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \\ \alpha\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) & \beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) & \gamma^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \end{pmatrix}$$

Or, comme nous avons :  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$   
Cela entraîne donc :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est bien une **matrice nilpotente**.

D'autre part, on a vu que l'application définie en (a) était injective. En restreignant son ensemble de départ à la conique d'équation  $[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0]$  elle reste injective et c'est toujours un plongement.

**Ce plongement de l'hyperplan d'équation  $[a^2 + b^2 + g^2 = 0]$  dans  $P_5$  paramètre les matrices nilpotentes de rang 1.**

d) Montrer que l'on peut plonger la **surface de Véronèse** dans  $P_4(K)$  : considérer les sécantes à la surface du point S (point du projectif que définissent les matrices scalaires) en les projetant sur l'hyperplan projectif associé aux matrices de traces nulle.

Soit une droite qui coupe la **surface de Véronèse** en 2 points, q et q', formes quadratiques de rang 1. Soit  $\phi$  et  $\psi$ , leurs formes linéaires associées. On a :

$$q = \phi^2 \quad \text{et} \quad q' = \psi^2$$

Soit  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ , la droite  $\lambda q + \mu q' = \lambda \phi^2 + \mu \psi^2$

C'est la somme de 2 carrés, donc la réduction de Gauss est déjà effectuée et l'on a :

$$\text{rang}(\lambda q + \mu q') = 2$$

Toute droite, coupant la **surface de Véronèse** en 2 points, ne contient que des formes quadratiques de rang 2. (Sauf les 2 points  $\lambda = 0$  et  $\mu = 0$  de la droite)

Soit S, le point du projectif que définissent les matrices scalaires :

$$S = \lambda \text{Id.}$$

On associe à S,  $q_s(x, y, z) = \lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2$  qui est de rang 3.

Etant dans le projectif, nous pouvons prendre :  $\lambda = 1$

Ainsi, toute droite issue de S, ne coupe la **surface de Véronèse** qu'en un point et un seul.

Soit E, notre espace vectoriel. Avec la forme hermitienne, nous avons :  $E = S \oplus S^\perp$

On peut décomposer tout élément x de E de la manière suivante :

$$x = \lambda S \oplus x_1$$

avec,  $x_1 = p(x)$  la projection de x sur  $S^\perp$

Posons :  $\lambda = 1$

Dans ce cas,  $S = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$

Soit maintenant une base de  $S^\perp$  :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit :  $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in E$

On peut alors écrire :

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \lambda \\ a_1 = -\alpha_1 + \lambda \\ a_2 = -\alpha_2 + \lambda \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} \lambda = (a_0 + a_1 + a_2) / 3 \\ \alpha_1 = (a_0 - 2a_1 + a_2) / 3 \\ \alpha_2 = (a_0 + a_1 - 2a_2) / 3 \end{cases}$$

Remplaçons  $\lambda$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  par leurs expressions en fonction des  $a_i$  on obtient dans  $S^\perp$  :

$$a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a_0 - 2a_1 + a_2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{a_0 + a_1 - 2a_2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2a_0 - a_1 - a_2)/3 \\ (-a_0 + 2a_1 - a_2)/3 \\ (-a_0 - a_1 + 2a_2)/3 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_4 \\ \leftarrow L_5 \\ \leftarrow L_6 \end{matrix}$$

$S^\perp$  est de dimension 5 et on remarque que : -  $L_1 = L_2 + L_3$

La projection de  $\mathbb{C}^6$  dans  $S^\perp$  donne finalement :

$$\mathbb{C}^6 \xrightarrow{\text{proj}} S^\perp$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (-a_0 + 2a_1 - a_2)/3 \\ (-a_0 - a_1 + 2a_2)/3 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$$

La Jacobienne de cette application est :

$$J = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 5, soit de rang maximal et de plus, l'application est injective car toute droite issue de  $S$  ne rencontre  $\mathbf{V}$ , la **surface de Véronèse** qu'en un point et un seul.

**On peut donc plonger  $\mathbf{V}$  dans  $P_4$ , l'hyperplan de matrices symétriques de trace nulle, correspondant à  $S^\wedge$ .**

e) Vérifier que dans tout l'exercice, il n'y a aucune raison pour se restreindre au cas où :  $n = 3$ .

Reprenons la question a) :

L'ensemble des formes quadratiques de rang 1 (2-mineurs = 0) définissent dans le projectif une variété fermée. Quand la dimension de l'espace vectoriel augmente, ce résultat ne change pas puisque seul le rang intervient et non la dimension.

Notons que si  $n = 1$ , l'espace projectif est réduit à un point. D'autre part,  $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ , classer les formes quadratiques sur  $\mathbf{K}$  revient à faire opérer  $GL(\mathbf{K}^n)$  sur  $Q(\mathbf{K}^n)$ .

**En changeant de dimension, les résultats déjà obtenus restent donc vrais.**

Il en est **de même pour les questions b) et e)**:

Soit  $Z$  un élément de  $E$  tel que  $Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $q$  appartenant à  $Q(E)$  où  $E$  est de dimension  $n$ .

On sait que  $q(z) = {}^t z A z$  où  $A$  est la matrice de  $q$  dans la base  $B = \{e_i, i = 1, \dots, n\}$  de  $E$ .

Soit  $A = (a_{ij})$ .

$$\text{Alors, } q(z) = {}_t z A z = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = \sum_i a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j$$

On peut donc montrer, de la même façon qu'à la question b), que lorsque  $q$  est de rang 1, cela équivaut à dire qu'il existe une forme linéaire non nulle  $\varphi$  telle que  $q = \varphi^2$ . On pourra donc reprendre les questions b) et e) de la même façon que précédemment avec  $E$  espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ .

Reprenons la question c)

On effectue un plongement de  $\mathbf{P}_2$  dans  $\mathbf{P}_5$ .

Posons comme hypothèse de récurrence, que nous plongeons  $\mathbf{P}_{n-1}$  dans  $\mathbf{P}_{(\frac{n^2-n}{2} + n - 1)}$

Vérifions cette formule par récurrence :

Pour  $n = 3$  :  $\mathbf{P}_{n-1} \longrightarrow \mathbf{P}_{(\frac{9-3}{2} + 3 - 1)} = \mathbf{P}_5$  la formule est vérifiée.

Supposons cette hypothèse vraie jusqu'à  $(n-1)$ . Nous avons :

$$\mathbf{P}_{n-2} \longrightarrow \mathbf{P}_{\frac{(n-1)^2 - (n-1)}{2} + n - 2}$$

Dans ce cas, on envoie :  $\mathbf{C}^{n-1} \longrightarrow$  matrice symétrique  $(n-1) \times (n-1)$

$$\mathbf{C}^n \longrightarrow \left( \begin{array}{c} \overbrace{\left( \begin{array}{c} \underbrace{\hspace{1cm}}_{n-1} \end{array} \right)}^{n-1} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_n \end{array} \right) \Bigg\}^n$$

Le nombre de termes d'une telle matrice est alors :

$$\frac{(n-1)^2 - (n-1)}{2} + n - 2 + n = \frac{n^2 + 1 - 2n - n + 1 + 2n - 2}{2} + n - 1 = \frac{n^2 - n}{2} + n - 1$$

Notre hypothèse de récurrence est donc vérifiée jusqu'à  $n$ .

**On peut effectuer un plongement de  $\mathbf{P}_{n-1}$  dans  $\mathbf{P}_{(\frac{n^2-n}{2} + n - 1)}$  pour toute valeur de  $n$ .**

Reprenons la question d)

On peut toujours paramétrer une matrice de rang 1, il suffit de connaître l'image de son premier vecteur de base, les autres étant colinéaires.

**Ceci reste vrai quelque soit la dimension.**

f) Montrer que pour  $n > 1$ , tout hyperplan de matrices symétriques complexes contient des matrices symétriques de rang 1.

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire  $\varphi$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^6 & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & \varphi & \\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \longmapsto & \sum_{i=0}^{i=5} \alpha_i x_i \end{array}$$

Soit  $\mathbf{H}$  l'hyperplan,  $\mathbf{H} = \text{Ker } \varphi$

L'équation de notre hyperplan est :

$$\alpha_0 X_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 + \alpha_5 X_5 = 0$$

En c) nous avons paramétré les matrices de rang 1.

Soit :

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne :

$$\alpha_0 x^2 + \alpha_1 xy + \alpha_2 xz + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 yz + \alpha_5 z^2 = 0$$

Ceci est l'équation d'une forme quadratique donc, d'une conique plane de  $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$  qui admet toujours des solutions dans  $\mathbf{C}$ . **Et tout hyperplan de matrices symétriques complexes contient bien des matrices symétriques de rang 1.**

\* Par exemple, nous avons :

$$y = 1 \text{ et } z = 0 \Rightarrow \lambda_0 x^2 + \lambda_1 + \lambda_3 x = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-\lambda_0 \pm \sqrt{\lambda_3^2 - 4\lambda_1\lambda_0}}{2\lambda_0}$$

# CONCLUSION

Ce projet est pour nous, une première approche de la géométrie projective en dimension  $n$ . Il nous montre que des simplifications peuvent être obtenues en passant par des dimensions plus élevées. Il illustre également le fait que les difficultés s'estompent, quand une simple surface est projetée dans un espace de dimension 3. C'est une façon assez originale d'envisager la géométrie projective.

Ce travail nous fait comprendre que, ce que nous considérons comme de l'algèbre linéaire, peut devenir bel et bien de la géométrie. Il est possible de passer facilement du cadre affine au cadre projectif, et inversement. On peut traiter plus aisément par exemple, des problèmes d'alignement ou d'intersection.

De manière générale, il nous est apparu que l'emploi de la projection permet d'appréhender les problèmes de façon plus dynamique et apporte en particulier, une meilleure vision de l'espace en trois dimensions.

Cette étude nous a ouvert des horizons sur une branche des mathématiques qui nous était jusqu'alors inconnue.

## ADDENDUM

Nous tenons à remercier particulièrement Monsieur Jean VALLES pour l'aide qu'il nous a apportée dans notre travail. Ses conseils mais aussi le temps qu'il a bien voulu nous consacrer, nous ont été précieux.

# BIBLIOGRAPHIE

- SIDLER J.C., Géométrie projective. Cours, exercices et problèmes corrigés, Ed. DUNOD, 1993, ISBN 2-1000-5234-9
  - BERGER M., Géométrie, tome 1 et 2, Ed. NATHAN, 1990, ISBN 2-0919-1731-1
  - MONIER J.M., Algèbre, tome 2, Ed. DUNOD, 2000, ISBN 2-1000-4915-1
  - AUDIN M., Géométrie, de la licence à l'agrégation, Ed. BELIN, 1998, ISBN 2-7011-2130-2
  - PICHON J., Groupes, Espaces vectoriels, Ed. ELLIPSES, 1990, ISBN 2-7298-9035-1
  - LELONG-FERRAND, Les fondements de la géométrie, Ed. PUF, 1985, ISBN 2-1303-8851-5
  - DIEUDONNE J., Abrégé d'histoire des mathématiques, Ed. HERMANN.
-