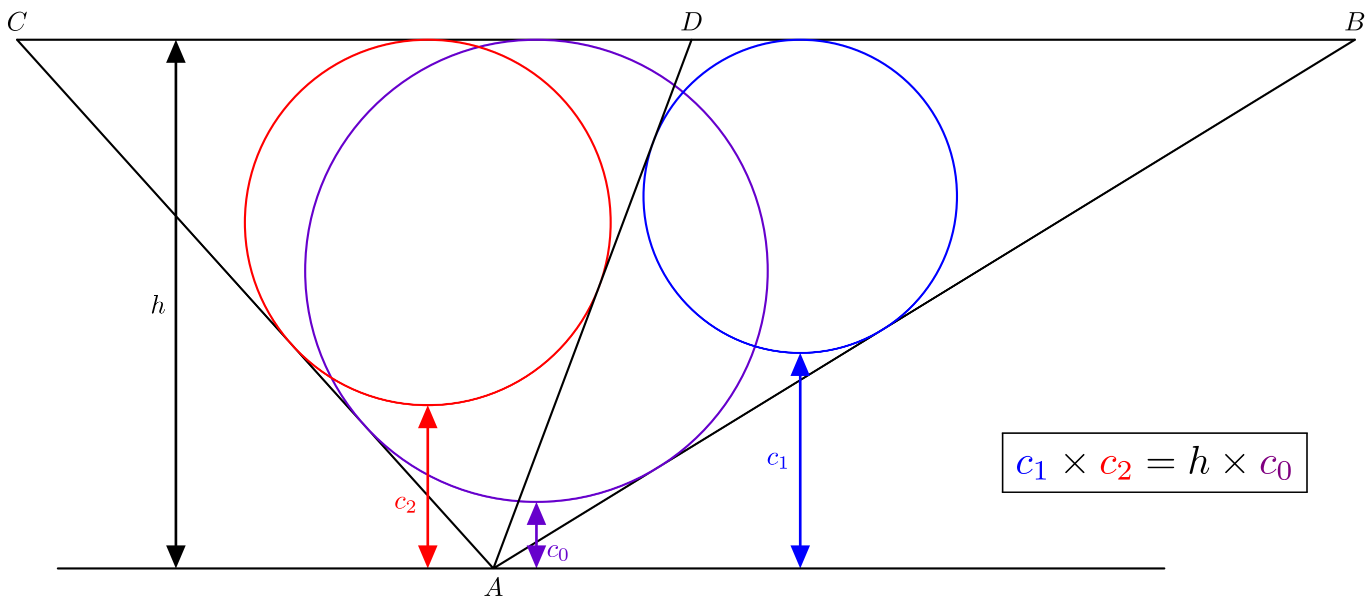

Théorème : Soit ABC un triangle quelconque. On note h la longueur de la hauteur issue de A, r le rayon du cercle inscrit dans ABC et c_0 la "co-hauteur" définie par $c_0 = h - 2r$.
Soit D un point de $[BC]$, r_1 et r_2 les rayons des cercles inscrits dans ABD et ADC respectivement.
Enfin, on note c_1 et c_2 les co-hauteurs relatives : $c_1 = h - 2r_1$ et $c_2 = h - 2r_2$.

On a : $\boxed{c_1 \times c_2 = h \times c_0}$

Remarque : ce théorème se généralise facilement à n cercles : $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} c_i = h^{n-1} \times c_0$.

Démonstration : Notons $b = AC$, $c = AB$, $d = AD$, $a_1 = BD$ et $a_2 = DC$.
On montre que ce théorème équivaut au théorème de Stewart : $c^2 a_2 + b^2 a_1 = a a_1 a_2 + a d^2$.

Si on note $\mathcal{A}_1$ l'aire de ABD et $\mathcal{A}_2$ celle de ADC, on a $\mathcal{A}_1 = \dfrac{1}{2} h a_1$ et $\mathcal{A}_2 = \dfrac{1}{2} h a_2$.
On a $\quad r_1 = \dfrac{2\mathcal{A}_1}{a_1 + d + c} = \dfrac{h a_1}{a_1 + d + c} \quad$ donc $\quad c_1 = h - 2r_1 = h\left(1 - \dfrac{2a_1}{a_1 + d + c}\right) = h \times \dfrac{d + c - a_1}{d + c + a_1}$.
De même, $c_2 = h \times \dfrac{d + b - a_2}{d + b + a_2} \quad$ et $\quad c_0 = h \times \dfrac{c + b - a}{c + b + a}$.

L'égalité à démontrer s'écrit alors, après simplification par h^2 : $\boxed{\left(\dfrac{d + c - a_1}{d + c + a_1}\right)\left(\dfrac{d + b - a_2}{d + b + a_2}\right) = \dfrac{c + b - a}{c + b + a}}$
ce qui équivaut à : $\quad (d + c - a_1)(d + b - a_2)(c + b + a) = (d + c + a_1)(d + b + a_2)(c + b - a)$
En posant temporairement $\alpha = d + c$, $\beta = d + b$ et $\gamma = c + b$, cette égalité s'écrit :
$(\alpha - a_1)(\beta - a_2)(\gamma + a) = (\alpha + a_1)(\beta + a_2)(\gamma - a)$.
On développe et on simplifie : il reste $\quad \alpha a_2 \gamma + a_1 \beta \gamma = \alpha \beta a + a_1 a_2 a$,
c'est-à-dire $\quad (c + b)(d + c)a_2 + (c + b)(d + b)a_1 = a a_1 a_2 + a(d + c)(d + b)$
$c^2 a_2 + d(c + b)a_2 + bca_2 + b^2 a_1 + d(b + c)a_1 + bca_1 = a a_1 a_2 + ad^2 + abc + ad(b + c)$ et puisque $a_1 + a_2 = a$, on obtient :
$\boxed{c^2 a_2 + b^2 a_1 = a a_1 a_2 + a d^2}$ qui est l'égalité du théorème de Stewart.