Nombres et triplets de Markov

par Antoine Hollard[1]

On donne les définitions suivantes.

Définitions.

- Un triplet d'entiers naturels non nuls (x, y, z) est un triplet de Markov si

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \qquad (E).$$

- Un entier naturel non nul x est un nombre de Markov si et seulement s'il fait partie d'un triplet de Markov.

Exemples. $(1,1,1)$, $(2,1,1)$, $(5,2,1)$ sont des triplets de Markov ; les entiers 1, 2, 5 sont donc des nombres de Markov.

Si on fixe x et y, l'équation en z, $(E_z) \quad x^2+y^2+z^2-3xyz=0$, est une équation du second degré dont la somme des racines est $3xy$ et le produit x^2+y^2. Si z est solution de (E_z), alors $3xy - z = \dfrac{x^2+y^2}{z}$ est aussi solution, ce qui montre que si (x, y, z) est un triplet de Markov, $(x, y, 3xy - z)$ est aussi un triplet de Markov.

Notations et définitions. On pose pour x, y, z réels, $N(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz$.
On considère l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi : (x, y, z) \mapsto (x, y, 3xy - z)$; φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, involutif, vérifiant $N \circ \varphi = N$.

I Étude géométrique

On va s'intéresser d'abord ici à la surface Σ d'équation $(E) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ dans un repère orthonormal.

1. cosinushollard@yahoo.fr

I.1 Invariances

Si $M(x, y, z)$ est sur Σ, les points obtenus par permutation de (x, y, z) le sont aussi. La surface est donc invariante par la réflexion S_{xy} par rapport au plan $x = y$, par la réflexion S_{yz} par rapport au plan $y = z$, par la réflexion S_{zx} par rapport au plan $x = z$, et par les rotations R_1 et R_2 d'axe passant par l'origine O, dirigés par le vecteur de coordonnées $(1, 1, 1)$, d'angles $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$. La surface (Σ) est également invariante par les demi-tours S_x, S_y, S_z par rapport aux axes du repère.

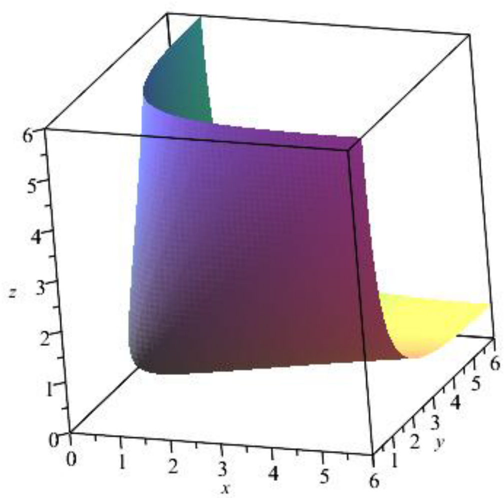
I.2 Composantes de Σ

$$(E) \iff (x - \frac{3}{2}yz)^2 + y^2(1 - \frac{9}{4}z^2) + z^2 = 0.$$

Si $|z| \leqslant \frac{2}{3}$, on a nécessairement $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$. Raisonnement analogue pour $|x| \leqslant \frac{2}{3}$, $|y| \leqslant \frac{2}{3}$. Donc O est un point isolé de la surface. De plus, les points de $\Sigma \smallsetminus \{O\}$ vérifient $|x| > \frac{2}{3}$, $|y| > \frac{2}{3}$, $|z| > \frac{2}{3}$.

On peut partager la surface en plusieurs composantes : $\Sigma_+ = \Sigma \cap \{x > 0, y > 0, z > 0\}$, $\Sigma_1 = \Sigma \cap \{x > 0, y < 0, z < 0\}$, $\Sigma_2 = \Sigma \cap \{x < 0, y > 0, z < 0\}$ et $\Sigma_3 = \Sigma \cap \{x < 0, y < 0, z > 0\}$.

On passe de Σ_+ aux autres composantes grâce aux demi-tours S_x, S_y, S_z.



I.3 Points singuliers de la surface

$M(x, yz)$ est point singulier s'il vérifie les équations

$$N(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{grad} N(x, y, z) = 0.$$

En un tel point, $N(x, y, z) = 0$, $2x = 3yz$, $2y = 3zx$, $2z = 3xy$. D'où $2x^2 = 3xyz = 2y^2 = 2z^2$, ce qui montre que $2(x^2 + y^2 + z^2) = 9xyz = 3(x^2 + y^2 + z^2)$. Donc le seul point singulier serait le point isolé O. Donc tous les points de $\Sigma \smallsetminus \{O\}$ sont réguliers.

I.4 Intersection avec un plan parallèle à un plan de coordonnées

On étudie par exemple l'intersection avec le plan $z = a$, avec $a > \dfrac{2}{3}$.

Alors $x^2 + y^2 + a^2 - 3xya = 0$. On trouve dans ce plan une hyperbole dont les axes sont les deux bissectrices. En prenant le repère de ces deux axes, on trouve

$$x'^2\left(\frac{3a}{2} - 1\right) - y'^2\left(1 + \frac{3a}{2}\right) = a^2, \quad \text{avec} \quad x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad y' = \frac{y-x}{\sqrt{2}}.$$

I.5 Conséquence : Paramétrage de Σ_+

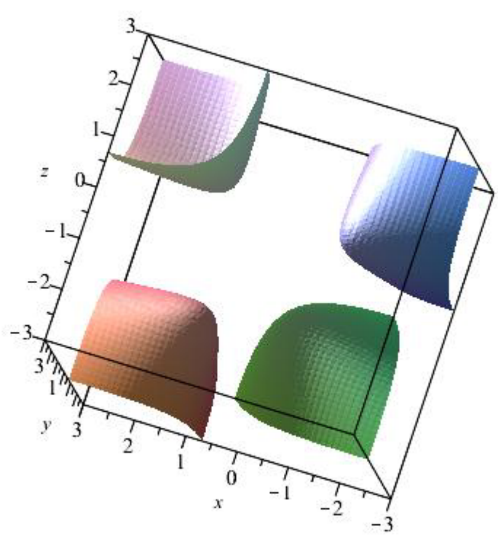
Donc $x' > 0$ et on peut poser $x' = a\dfrac{\operatorname{ch} u}{\sqrt{\frac{3a}{2} - 1}}$ et $y' = a\dfrac{\operatorname{sh} u}{\sqrt{\frac{3a}{2} + 1}}$, et on a donc le paramétrage suivant pour Σ_+ :

$$\begin{cases} x = z\dfrac{\operatorname{ch} u}{\sqrt{3z-2}} - z\dfrac{\operatorname{sh} u}{\sqrt{3z+2}} \\ y = z\dfrac{\operatorname{ch} u}{\sqrt{3z-2}} + z\dfrac{\operatorname{sh} u}{\sqrt{3z+2}} \end{cases}$$

avec $z > \dfrac{2}{3}$ et u réel quelconque.

Conséquence. Soit F l'application définie sur $E = \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[\times \mathbb{R}$ qui à (z, u) fait correspondre le point M de coordonnées (x, y, z) ainsi paramétré. L'application F est bijective de E sur Σ_+ et réalise un homéomorphisme (F est continue, de même que F^{-1} puisqu'on trouve $u = \operatorname{Argsh}\left(\dfrac{(y-x)\sqrt{3z+2}}{2z}\right)$).

On en déduit que Σ_+ et donc aussi Σ_1, Σ_2 et Σ_3 sont les composantes connexes par arc de Σ.



I.6 Intersection avec la sphère *S* de centre *O* et de rayon *R*

On utilise les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

L'équation (E) devient $1 = 3R\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi = \dfrac{3}{2}R\sin^2\theta\cos\theta\sin 2\varphi$.

Posons $u(\theta) = \sin^2\theta\cos\theta = \cos\theta - \cos^3\theta$.

L'intersection de Σ_+ et de S est donnée par l'équation implicite $u(\theta)\sin 2\varphi = \dfrac{2}{3R}$, avec $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ et $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. On étudie $u(\theta)$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $u'(\theta) = \sin\theta(3\cos^2\theta - 1)$; u présente donc un maximum M en $a = \operatorname{Arccos}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, et $M = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

Si $R < \sqrt{3}$, l'intersection est vide.

Si $R = \sqrt{3}$, l'intersection vérifie $\theta = \operatorname{Arccos}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, ce qui donne $x = y = z = 1$. Le point A de coordonnées $(1,1,1)$ est donc le point de Σ_+ le plus proche de O, et Σ_+ est tangente à S en ce point.

Si $R > \sqrt{3}$, il existe θ_1 et θ_2 avec $0 < \theta_1 < a < \theta_2 < \dfrac{\pi}{2}$ et $u(\theta_1) = u(\theta_2) = \dfrac{2}{3R}$. Pour θ fixé quelconque entre θ_1 et θ_2, deux valeurs de φ, φ_1 et $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2} - \varphi_1$, vérifient $u(\theta)\sin 2\varphi = \dfrac{2}{3R}$ puisque $u(\theta) > \dfrac{2}{3R}$. On trouve une intersection non vide.

Remarque. On a ainsi un autre paramétrage de Σ_+ en coordonnées sphériques (r,φ,θ), avec $r = \dfrac{2}{3u(\theta)\sin 2\varphi}$, où θ et φ sont tels que $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ et $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

I.7 Contour apparent de Σ_+ et projection sur un plan de coordonnées

Projetons Σ_+ sur le plan xOy. Soit D cette projection. Un point $m(x,y)$, avec $x > 0$ et $y > 0$, est dans D si et seulement si on peut trouver $z > 0$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$, ce qui veut dire que le discriminant Δ de cette équation en z, (E_z), est positif ou nul (on est alors sûr que z solution de (E_z) est positif).

Or $\Delta(x,y) = 9x^2y^2 - 4(x^2 + y^2)$.

Si z est solution de (E_z), l'autre solution est $3xy - z = \dfrac{x^2+y^2}{z}$.

Étudions la courbe C d'équation $9x^2y^2 - 4(x^2 + y^2) = 0$ avec $x > 0$ et $y > 0$. En coordonnées polaires, C a pour équation $9\rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta - 4 = 0$, soit $\rho = \dfrac{2}{3\cos\theta\sin\theta} = \dfrac{4}{3\sin 2\theta}$ avec $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

La courbe C présente une symétrie par rapport à la première bissectrice et deux asymptotes orthogonales $x = \dfrac{2}{3}$ et $y = \dfrac{2}{3}$. La projection D est l'ensemble des points au-dessus de C, C comprise.

Le point de coordonnées (x, y) est sur C si et seulement si l'équation (E_z) a une solution double, c'est-à-dire $z = \dfrac{3}{2}xy$, ce qui veut dire que grad N est horizontal et que le plan tangent à Σ_+ est vertical. Donc C est bien la projection du contour apparent C' de Σ_+ , où C' est paramétré par $x = \dfrac{2}{3\sin\theta}$, $y = \dfrac{2}{3\cos\theta}$, $z = \dfrac{2}{3\cos\theta\sin\theta} = \dfrac{4}{3\sin 2\theta}$.

Pour les autres points m de D, soit pour $\rho > \dfrac{4}{3\sin 2\theta}$, la verticale passant par m coupe Σ_+ en deux points $M_1(x, y, z_1)$ et $M_2(x, y, z_2)$ avec $z_2 = 3xy - z_1 = \dfrac{\rho^2}{z_1}$.

II Nombres de Markov

On étudie ici les triplets de Markov formés d'entiers naturels *strictement positifs*.

II.1 Triplets normalisés

Proposition. *Si (x, y, z) est un triplet de Markov tel que $x = y$, alors $x = y = 1$ et $z = 1$ ou 2.*

Démonstration. Si $x = y$, on a donc $2x^2 + z^2 = 3x^2z$, c'est-à-dire $(3z - 2)x^2 = z^2$. Donc x^2 divise z^2, donc x divise z, donc $z = dx$. On trouve alors $3dx - 2 = d^2$. Donc d divise 2, donc $d = 1$ ou 2. On trouve dans les deux cas $x = 1$. □

Hormis les triplets $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(2, 1, 1)$ et $(1, 2, 1)$ tous les triplets de Markov sont donc formés de trois nombres différents.

On dit que le triplet (x, y, z) est *normalisé* si et seulement si $x \leqslant y \leqslant z$. Tout triplet (x, y, z) peut évidemment toujours être transformé, par permutation de (x, y, z), en triplet normalisé. À l'exception de $(1, 1, 1)$ et $(1, 1, 2)$, tout triplet normalisé est formé de trois nombres distincts.

II.2 Une première estimation

Proposition. *Soit un triplet de Markov (x, y, z) vérifiant $x < y < z$. Alors $\dfrac{x^2 + y^2}{z} < z$.*

Démonstration. On suppose $x < y < z$. L'égalité (E) montre que $3xyz < 3z^2$ donc $xy < z$. On en déduit $\dfrac{x^2 + y^2}{z} < \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} < 1 + y \leqslant z$. Donc $3xy - z = \dfrac{x^2 + y^2}{z} < z$. □

II.3 Un triplet « générateur »

Pour un triplet de Markov $X = (x, y, z)$, posons $M(X) = \max(x, y, z)$. La proposition précédente montre que, si $x < y < z$, $M(\varphi(X)) < M(X)$.

Si on part d'un triplet de Markov normalisé quelconque $X = (x, y, z)$, où x, y, z sont distincts, on peut donc grâce à l'application φ, et en permutant éventuellement les coordonnées de $\varphi(X)$, trouver un autre triplet de Markov X' normalisé tel que $M(X') \leqslant M(X) - 1$.

En itérant le processus autant de fois qu'il faut, on arrive à $(1, 1, 2)$ à une permutation près, puis au triplet $(1, 1, 1)$.

Remarques. **a)** Si $X = (x, y, z)$ avec $x < y < z$, $\varphi(X)$ ne peut pas être un triplet normalisé. Sinon, on pourrait appliquer la même transformation à $\varphi(X)$ et on trouverait ainsi $M(\varphi \circ \varphi(X)) < M(\varphi(X))$, ce qui est impossible car $\varphi \circ \varphi(X) = X$. Donc $3xy - z < y$.

b) On pourrait interpréter ces opérations comme l'action, sur l'ensemble S des triplets de Markov, du groupe G des difféomorphismes de $\mathbb{R}^3$ engendré par l'application φ et le groupe $\mathcal{S}_3$ des permutations de (x, y, z). On vient ainsi de montrer que l'orbite du triplet $(1, 1, 1)$ par G est S tout entier.

II.4 Propriété des nombres de Markov

Théorème. *Pour tout nombre de Markov $c > 2$, il existe a et b tels que (a, b, c) soit un triplet normalisé.*

Démonstration. L'entier c est un nombre de Markov, donc il existe u et v tels que le triplet (u, v, c) soit un triplet de Markov. On normalise ce triplet. Si c n'est pas la plus grande coordonnée de ce triplet, on applique φ. On normalise le triplet obtenu. Si c n'est pas la plus grande coordonnée de ce nouveau triplet, on applique à nouveau φ. On construit ainsi une suite de triplets $X_n = (c, u_n, v_n)$ tant que c n'est pas la plus grande coordonnée de ces triplets. La suite d'entiers $M(X_n)$ étant strictement décroissante a un nombre fini de termes. Il existe donc n tel que $c > u_n$ et $c > v_n$.

Le théorème est donc montré. □

La question de montrer, pour c donné, l'unicité de a et b (conjecture d'unicité) est un problème ouvert depuis une bonne centaine d'années.

II.5 Triplets voisins

Définition. Deux triplets sont dits voisins si les listes de leurs coordonnées respectives ont deux termes égaux. Par exemple, (1, 1, 2) et (1, 2, 5) sont voisins.

Quels sont les voisins d'un triplet de Markov $X = (x, y, z)$?

- Si $x < y < z$, $X = (x, y, z)$ a trois voisins :

$$X_1 = (3yz - x, y, z), \quad X_2 = (x, 3xz - y, z), \quad \varphi(X) = (x, y, 3xy - z).$$

On a vu que $M(\varphi(X)) < M(X)$. D'autre part, $z < 2xz < 3xz - y < 3yz - x$ et donc

$$M(X_1) = 3yz - x > M(X_2) = 3xz - y > M(X).$$

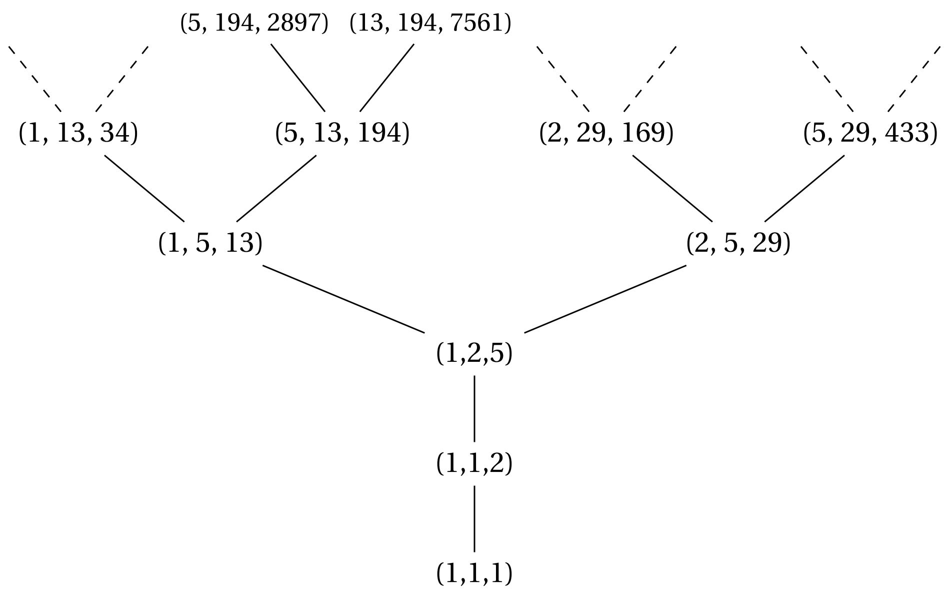
On peut dire que X_1 et X_2 sont deux voisins supérieurs de X.

- Enfin, $(1, 1, 2)$ a deux voisins : $(1, 1, 1)$ et $(1, 2, 5)$, et $(1, 1, 1)$ a pour seul voisin $(1, 1, 2)$.

II.6 Arbre de Markov

On peut représenter les triplets normalisés de Markov à l'aide d'un arbre.
À la racine, on place $(1, 1, 1)$.
Au-dessus de lui, son seul voisin $(1, 1, 2)$.
Au-dessus de $(1, 1, 2)$ son voisin $(1, 2, 5)$.

Au-dessus de $(1,2,5)$, ses deux voisins supérieurs $(1,5,13)$ et $(2,5,29)$.
Et ainsi de suite.



II.7 Autre forme de la conjecture d'unicité

Pour $X = (x, y, z)$, on reprend la notation $M(X) = \max(x, y, z)$. La conjecture d'unicité se traduit par une conjecture de bijectivité de l'application $X \mapsto M(X)$ définie sur l'ensemble des triplets normalisés de Markov, à valeurs dans l'ensemble des nombres de Markov.

II.8 Algorithmes

Comment chercher si un entier n est un nombre de Markov ?

On suppose $n > 2$. L'algorithme consiste à chercher, parmi les couples (x, y), avec $x < y < n$, si l'un au moins vérifie $x^2 + y^2 + n^2 = 3xyn$.

► Si on essaie tous les couples (x, y) possibles il y a $(n-1)(n-2)/2$ couples à tester ; on a donc un algorithme en $O(n^2)$ pour les grandes valeurs de n.

► On peut restreindre le choix de x et y : si x et y sont solutions, avec $x < y < n$, on a vu que $xy < n$, donc $x^2 < n$.

Pour chaque valeur de x comprise entre 1 et $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$, il suffit d'essayer les valeurs de y comprises entre $x+1$ et $\dfrac{n}{x}$. Nombre maximal de tests à faire :

$$\sum_{1\leqslant x\leqslant\sqrt{n}} \left(\left\lfloor \frac{n}{x}\right\rfloor - x\right).$$

Soient

$$A = \sum_{1\leqslant x\leqslant\sqrt{n}} \left\lfloor \frac{n}{x}\right\rfloor \qquad \text{et} \qquad B = \sum_{1\leqslant x\leqslant\sqrt{n}} x.$$

Alors $B = \dfrac{1}{2}\lfloor\sqrt{n}\rfloor\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1\right)$ est équivalent à $\dfrac{n}{2}$ à l'infini.

D'autre part, $n \sum_{1 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}} \frac{1}{x} - \sqrt{n} \leqslant A \leqslant n \sum_{1 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}} \frac{1}{x}$. Pour n tendant vers l'infini, $\sum_{1 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}} \frac{1}{x}$ est équivalent à $\ln \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, donc à $\ln \sqrt{n}$. Donc A est équivalent à $\frac{1}{2} n \ln n$. Le nombre maximal de tests à faire est donc équivalent à $\frac{1}{2} n \ln n$: on a alors un algorithme en $O(n \ln n)$.

III Propriétés arithmétiques

III.1 PGCD des nombres d'un triplet de Markov

Proposition. *Si $X = (x, y, z)$ est un triplet de Markov, x, y et z sont premiers entre eux deux à deux.*

Démonstration. Soit $X = (x, y, z)$ un triplet de Markov.

► Pour $X = (x, y, z)$ posons $D(X) = \mathrm{pgcd}(x, y, z)$. Si on permute entre eux x, y et z, on ne change pas $D(X)$. De plus, $D(\varphi(X)) = D(X)$: en effet, si d divise x, y, z, alors d divise x, y et $3xy - z$. Réciproquement, si d divise x, y et $3xy - z$, alors d divise x, y, z. Donc, comme on passe de X à $(1,1,1)$ en appliquant des permutations de x, y, z et l'application φ autant de fois qu'il faut, on trouve $D(X) = D(1,1,1) = 1$, donc x, y et z sont premiers entre eux dans leur ensemble.

► Si p premier divisait x et y, p diviserait $3xy$, donc p diviserait z^2, donc p diviserait z, donc x, y, z ne seraient plus premiers entre eux dans leur ensemble. □

Conséquence. Il en résulte que, si (x, y, z) est un triplet de Markov, ou bien x, y et z sont impairs, ou bien un des trois est pair et les deux autres sont impairs.

III.2 Diviseurs premiers d'un nombre de Markov

Proposition. *Les seuls diviseurs premiers possibles d'un nombre de Markov sont 2 et les nombres premiers congrus à 1 modulo 4.*

Démonstration. Soit p un diviseur premier d'un entier x de Markov et (x, y, z) un triplet de Markov associé. Alors p divise $y^2 + z^2$. Or p ne peut diviser ni y, ni z. Donc y et z sont inversibles dans $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et l'équation $t^2 + 1 = 0$ a une solution dans $\mathbb{F}_p$. Donc $p = 2$ ou $p \equiv 1 \mod 4$. (Le résultat est bien connu. Pour le montrer si p est impair, il suffit de compter le nombre de carrés dans $\mathbb{F}_p^*$, qui est $\frac{1}{2}(p-1)$, de déduire du théorème de Fermat que les carrés dans $\mathbb{F}_p^*$ sont solutions de l'équation $t^{\frac{1}{2}(p-1)} = 1$, équation qui a au plus (donc exactement) $\frac{1}{2}(p-1)$ solutions qui sont donc les carrés dans $\mathbb{F}_p^*$, et de constater que, si -1 est solution de cette équation, alors $p \equiv 1 \mod 4$.) □

Conséquence. Un nombre de Markov impair est congru à 1 modulo 4.

Remarques. Il résulte de ces propriétés que tout nombre de Markov est somme de deux carrés. La réciproque est fausse : $18 = 3^2 + 3^2$ n'est pas un nombre de Markov.

Tout diviseur premier d'un nombre de Markov impair est congru à 1 modulo 4. La réciproque est fausse : 17 par exemple n'est pas un nombre de Markov.

III.3 Conséquence sur les nombres de Markov pairs

Proposition. *Un nombre de Markov pair est congru à 2 modulo 32.*

Démonstration. Soit x est un nombre de Markov pair, il forme avec y et z impairs un triplet de Markov.

Alors $x^2+y^2+z^2 \equiv y^2+z^2 \equiv 2 \mod 4$. Donc $3xyz \equiv 2 \mod 4$. Donc x est congru à 2 modulo 4.

On écrit donc $x = 2x'$ où x' est impair. Les seuls diviseurs premiers de x' sont impairs, de la forme $p = 4k+1$. Donc $x' \equiv 1 \mod 4$ et $x \equiv 2 \mod 8$.

Posons alors $x' = 1+4u$ et, comme y et z sont impairs, $y = 1+4v$, $z = 1+4w$. On reporte dans (E). On trouve, après simplification par 8,

$$8u^2+2v^2+2w^2 = 48uvw+12(vw+uv+uw)-u+2v+2w.$$

Donc $u \equiv 2(v-v^2)+2(w-w^2) \mod 4$, donc u est divisible par 4, $u = 4k$, et finalement, $x = 2+32k$. □

Mais cette condition n'est pas suffisante pour trouver un nombre de Markov : 2 et 34 sont des nombres de Markov, mais pas 66 qui est divisible par 3.

III.4 Équation $x^2+y^2+z^2 = kxyz$

Théorème. *L'équation $x^2+y^2+z^2 = kxyz$, où k est un entier donné, a des solutions dans $(\mathbb{N}^*)^3$ si et seulement si $k = 1$ ou $k = 3$.*

Démonstration. Soit donc une solution possible (x, y, z).

► Supposons k multiple de 3, $k = 3m$. on a alors $m^2(x^2+y^2+z^2) = 3m^3xyz$, ce qui montre que le triplet (mx, my, mz) est un triplet de Markov. Alors mx, my, mz sont premiers entre eux; donc $m = 1$ et $k = 3$.

► Supposons k non multiple de 3. Si x, y, et z sont premiers avec 3, on a $x^2 \equiv 1 \mod 3$, de même pour y et z. Donc $x^2+y^2+z^2 \equiv 0 \mod 3$ alors que $kxyz$ est premier avec 3. C'est impossible.

Donc un des trois nombres au moins, x, y ou z est divisible par 3. Par exemple, $x \equiv 0 \mod 3$. On en déduit $y^2+z^2 \equiv 0 \mod 3$. Alors nécessairement $y \equiv 0 \mod 3$ et $z \equiv 0 \mod 3$. On peut donc poser $x = 3x'$, $y = 3y'$ et $z = 3z'$.

On trouve donc $x'^2+y'^2+z'^2 = 3kx'y'z'$; on est ramené au cas précédent : $k = 1$; et les solutions (x, y, z) trouvées sont les multiples par 3 des triplets de Markov. □

Remarque. L'équation $x^2+y^2+z^2 = kxyz$ est elle-même un cas particulier de l'équation de Hurwitz $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 = kx_1x_2\cdots x_n$, où k est entier, dont on peut montrer qu'elle n'a pas de solution dans $(\mathbb{N}^*)^n$ pour $k > n$.

IV Triplets de Markov contenant un nombre donné

IV.1 Construction d'une suite de triplets de Markov contenant un entier de Markov donné

Soit (a,b,c) un triplet de Markov. Alors $\varphi(a,c,b)=(a,c,3ac-b)$. On peut ainsi construire par récurrence des triplets de Markov $X_n=(a,b_n,c_n)$ tels que $b_{n+1}=c_n$ et $c_{n+1}=3ac_n-b_n$ à partir de $b_0=b$ et $c_0=c$. La suite (c_n) vérifie donc

$$c_{n+1}-3ac_n+c_{n-1}=0.$$

L'équation caractéristique $t^2-3at+1=0$ a deux solutions $r>1$ et $r'=1/r$. Donc c_n s'écrit $c_n=\lambda r^n+\mu r'^n$, λ et μ étant déterminés par $\lambda+\mu=c_0$ et $\lambda r+\mu r'=3ac_0-b_0$.

Comportement à l'infini

Pour n quelconque, $c_n\geqslant 1$, donc $\lambda>0$, et $c_n=O(r^n)$.

Parité des coefficients

Si a est pair, tous les c_n sont impairs et $c_n\equiv 1 \mod 4$.

Si a est impair, sur trois termes c_n consécutifs, deux sont impairs et un est pair. En effet, si c_{n-1} est pair, alors c_n et c_{n+1} sont impairs ; si c_{n-1} et c_n sont impairs, c_{n+1} est pair.

Exemples. **a)** On construit ainsi par récurrence à partir du triplet $A=(1,1,1)$ des triplets de Markov $A_n=(1,b_n,c_n)$ tels que $b_{n+1}=c_n$ et $c_{n+1}=3c_n-b_n$, avec $b_0=c_0=1$. La suite (c_n) vérifie donc $c_{n+1}-3c_n+c_{n-1}=0$. L'équation caractéristique $t^2-3t+1=0$ a pour solutions $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2$. Grâce aux conditions $c_0=1$ et $c_1=2$, on trouve, après simplification,

$$c_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right)=F_{2n+1},$$

où F_{2n+1} est le $(2n+1)^{\text{e}}$ nombre de la suite de Fibonacci. Le triplet $(1,F_{2n-1},F_{2n+1})$ est donc un triplet de Markov.

Remarque. On retrouve ainsi certaines propriétés de la suite de Fibonacci :

- si F_{2n+1} est impair, alors $F_{2n+1}\equiv 1 \mod 4$, et si F_{2n+1} est pair, alors $F_{2n+1}\equiv 2 \mod 32$;
- les entiers F_{2n-1} et F_{2n+1} ne peuvent pas être tous les deux pairs ;
- si F_{2n-1} et F_{2n+1} sont impairs, alors $F_{2n}\equiv 0 \mod 4$;
- si F_{2n+1} est pair, alors $F_{2n}\equiv 1 \mod 4$;
- si F_{2n-1} est pair, alors $F_{2n}\equiv 3 \mod 4$;
- de plus, $F_{2n-1}F_{2n+1}-F_{2n}^2=1$. En effet, $F_{2n}^2=(F_{2n+1}-F_{2n-1})^2$.

b) Partons du triplet $B=(2,1,1)$. On construit des triplets de Markov $B_n=(2,b_n,c_n)$ tels que $b_{n+1}=c_n$ et $c_{n+1}=6c_n-b_n$, avec $b_0=c_0=1$. La suite (c_n) vérifie donc

$$c_{n+1}-6c_n+c_{n-1}=0.$$

L'équation caractéristique $t^2-6t+1=0$ a pour solutions $3\pm 2\sqrt{2}=\left(1\pm\sqrt{2}\right)^2$. Avec $c_0=1$ et $c_1=5$, on trouve

$$c_n=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}}{2\sqrt{2}}=P_{2n+1},$$

où P_{2n+1} est le $(2n+1)^{\mathrm{e}}$ nombre de Pell. Les nombres de Pell d'indice impair P_{2n+1} vérifient donc $P_{2n+1}\equiv 1 \mod 4$.

IV.2 Que peut-on dire en général des triplets contenant un nombre de Markov donné ?

Soit a un nombre de Markov, avec $a>2$. Les triplets de Markov (x,y,a) qui le contiennent peuvent être de trois formes : $x<y<a$; $x<a<y$; $a<x<y$.

Admettons la conjecture d'unicité.

- Il y a un seul triplet vérifiant $x<y<a$. Soit (b,c,a) ce triplet avec $b<c<a$.
- Triplets vérifiant $x<a<y$: $\varphi(b,a,c)=(b,a,c')$ avec $c'=3ab-c>a$, et $\varphi(c,a,b)=(c,a,b')$ avec $b'=3ac-b>a$. On a donc déjà deux triplets qui conviennent. Montrons que ce sont les seuls.

  Si (x,a,y) est un triplet de Markov avec $x<a<y$, alors $\varphi(x,a,y)=(x,a,y')$ avec $y'<a$. Donc $(x,y')=(c,b)$ ou (b,c), soit deux possibilités pour x et y', et donc deux possibilités pour x et y. Et donc $(x,a,y)=(b,a,c')$ ou (c,a,b').
- Triplets $a<x<y$: la construction faite au paragraphe précédent montre qu'il y en a une infinité.

Il y aurait encore beaucoup de propriétés à étudier sur les nombres de Markov, liées à différents domaines, depuis la théorie des nombres jusqu'à la géométrie hyperbolique.

Bibliographie

[1] Christophe Rose, *L'équation d'Hurwitz.*
`https://www.normalesup.org/~rose/maths/hurwitz/hurwitz.pdf`

[2] Michel Waldschmidt, *Autour de l'équation de Markoff.*
`https://webusers.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/articles/pdf/MarkoffFr.pdf`