Une série numérique avec coefficient binomial central

par Joël Pipon [1] et Claude Morin [2]

Résumé

Cet article étudie, avec des moyens élémentaires, une série numérique où intervient le coefficient binomial central $\binom{2n}{n}$. Plus précisément, on établit que, pour $k \geqslant 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (n-1)\cdots(n-k)}{\binom{2n}{n}} = \mathrm{A}(k) + \pi \mathrm{B}(k),$$

avec $\mathrm{A}(k)/2$ et $2\mathrm{B}(k)$ entiers, et $\lim_k \mathrm{A}(k)/\mathrm{B}(k) = \pi$.
En retour, les résultats obtenus permettent de revenir sur une conjecture portant sur une autre série avec coefficient binomial central, due notamment à D. Lehmer.

Introduction

Si, avec Maple, l'on calcule pour les premières valeurs de $k \geqslant 1$ la somme

$$\mathrm{S}(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (n-1)\cdots(n-k)}{\binom{2n}{n}},$$

on obtient des résultats de la forme

$$\mathrm{S}(k) = \mathrm{A}(k) + \pi \mathrm{B}(k)$$

1. Lycée polyvalent Charles Coeffin, Baie Mahault.
2. Lycée Gay-Lussac, Limoges.

ou, plus précisément, en notant $a_k = \frac{\mathrm{A}(k)}{2}$ et $b_k = 2\mathrm{B}(k)$,

$$\mathrm{S}(k) = 2a_k + b_k\frac{\pi}{2} \quad \text{avec} \quad (a_k, b_k) \in \mathbb{N}^2$$

avec cette progression remarquable :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_k	1	2	8	32	192	1152	9216	73728	737280	7372800	88473600	1061683200
a_{k+1}/a_k	2	4	4	6	6	8	8	10	10	12	12	
b_k	1	3	9	45	225	1575	11025	99225	893025	9823275	108056025	1404728325
b_{k+1}/b_k	3	3	5	5	7	7	9	9	11	11	13	

Dans une première partie, on valide la conjecture apparue dans les calculs ci-dessus.

Dans une deuxième partie, on étudie le comportement asymptotique des suites précédemment définies.

Les résultats obtenus amènent à faire le lien avec la conjecture de LEHMER.

I Relations de récurrence

I. 1 Introduction d'une série entière

On considère la série entière de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{x^n}{n}.$$

Notons $u_n = \dfrac{2^n}{\binom{2n}{n}} \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$. On vérifie que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{2n+1}. \tag{1}$$

Par application du critère de D'ALEMBERT, le rayon de convergence de $f(x)$ est égal à 2.

La dérivée première, de même rayon, a pour expression

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} x^{n-1}$$

et, pour $k \geqslant 1$, la dérivée d'ordre $k+1$ de f se calcule par

$$f^{(k+1)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} (n-1)\cdots(n-k)\, x^{n-k-1},$$

de sorte que la suite $(\mathrm{S}(k))_{k\geqslant 1}$ est bien définie et a pour terme général

$$\mathrm{S}(k) = f^{(k+1)}(1).$$

I. 2 Relation de récurrence vérifiée par les S (k)

Avec la relation (1), pour $|x| < 2$,

$$(2n+1)\, u_{n+1} x^{n+1} = n u_n x^{n+1}$$

et, par sommation,

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\, u_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n+1},$$

ou encore

$$2x\left(f'(x) - u_1\right) - \left(f(x) - u_1 x\right) = x^2 f'(x),$$

et f est ainsi solution sur $]-2,2[$ de l'équation différentielle

$$\left(2x - x^2\right) y' - y = x. \tag{2}$$

Par application de la formule de LEIBNIZ, en dérivant $k+2$ fois cette équation différentielle, on obtient, pour tout $x \in\,]-2,2[$,

$$\left(2x - x^2\right) f^{(k+3)}(x) + 2(k+2)(1-x) f^{(k+2)}(x) - (k+2)(k+1) f^{(k+1)}(x) - f^{(k+2)}(x) = 0,$$

et, en particularisant en $x = 1$,

$$f^{(k+3)}(1) = f^{(k+2)}(1) + (k+1)(k+2) f^{(k+1)}(1).$$

Il en résulte la relation de récurrence :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \mathrm{S}(k+2) = \mathrm{S}(k+1) + (k+1)(k+2)\,\mathrm{S}(k). \tag{3}$$

I. 3 Calcul de la somme de la série entière

Puisque seules les valeurs des dérivées de f en 1 sont utiles, on résout l'équation différentielle (2) sur l'intervalle $]0,2[$.

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \longmapsto \mathrm{K}\sqrt{\frac{x}{2-x}}$ avec K réel, et la méthode de variation de la constante conduit à primitiver

$$x \longmapsto \mathrm{K}'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

Le changement de variable $x \longmapsto t = \sqrt{\frac{x}{2}}$ fournit

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x - x^2}} = 2 \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = 2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$$

et l'on peut conclure à l'existence d'une constante K telle que

$$\forall x \in\,]0,2[, \quad f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}\left(\mathrm{K} + 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\right).$$

Mais la définition de f montre que $f(x) \underset{0}{\sim} x$, ce qui impose $\mathrm{K} = 0$, et

$$\forall x \in]0,2[, \quad f(x) = 2\sqrt{\frac{x}{2-x}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right).$$

On en déduit $f(1) = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, puis $f'(1) = f(1) + 1 = 1 + \frac{\pi}{2}$, et par dérivation de l'équation (2) :

$$\left(2x - x^2\right) f''(x) + 2(1-x) f'(x) - f'(x) = 1$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{S}(1) = f''(1) = 2 + \frac{\pi}{2},$$

ce qui nous conduira à poser $a_1 = b_1 = 1$ dans la suite.

I. 4 Expression de S (k) à l'aide de a_k et b_k

Les calculs numériques sur les premiers termes ont mis en évidence le comportement singulier des quotients $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ et $\frac{b_{k+1}}{b_k}$. On choisit donc de définir les suites $(a_k)_{k\geqslant 1}$ et $(b_k)_{k\geqslant 1}$ par les conditions

$$a_1 = b_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 1, \begin{cases} a_{2k} = 2k\, a_{2k-1} & ; \quad a_{2k+1} = (2k+2)\, a_{2k} \\ b_{2k} = (2k+1)\, b_{2k-1} & ; \quad b_{2k+1} = (2k+1)\, b_{2k} \end{cases}$$

de sorte que, pour tout $k \geqslant 1$, $\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = 2k+2$ et $\frac{b_{2k+1}}{b_{2k}} = \frac{b_{2k}}{b_{2k-1}} = 2k+1$. Il s'agit bien sûr de suites d'entiers naturels.

On calcule alors, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$a_{2k+2} - a_{2k+1} = (2k+2)\, a_{2k+1} - a_{2k+1} = (2k+1)\, a_{2k+1} = (2k+1)(2k+2)\, a_{2k}$$

et

$$a_{2k+1} - a_{2k} = (2k+2)\, a_{2k} - a_{2k} = (2k+1)\, a_{2k} = 2k(2k+1)\, a_{2k-1},$$

donc

$$\forall k \geqslant 1, \quad a_{k+2} = a_{k+1} + (k+1)(k+2)\, a_k,$$

c'est-à-dire que $(a_k)_{k\geqslant 1}$ vérifie la même relation de récurrence (3) que la suite de terme général S (k).

Il en est de même pour la suite $(b_k)_{k\geqslant 1}$ car, pour $k \geqslant 1$,

$$b_{2k+2} - b_{2k+1} = (2k+3)\, b_{2k+1} - b_{2k+1} = (2k+2)\, b_{2k+1} = (2k+1)(2k+2)\, b_{2k}$$

et

$$b_{2k+1} - b_{2k} = (2k+1)\, b_{2k} - b_{2k} = 2k b_{2k} = 2k(2k+1)\, b_{2k-1}.$$

Les trois suites étant liées par une même relation d'ordre deux, on montre par récurrence :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \mathrm{S}(k) = 2a_k + b_k \frac{\pi}{2}.$$

L'hérédité ne pose pas de problème et l'initialisation a été faite pour $k = 1$ par le calcul de $\mathrm{S}(1) = 2 + \frac{\pi}{2}$. Comme il s'agit d'une récurrence double, on vérifie enfin, par dérivation de l'équation (2), que

$$\mathrm{S}(2) = f^{(3)}(1) = f''(1) + 2f'(1) = 2 + \frac{\pi}{2} + 2\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = 4 + 3\frac{\pi}{2}$$

a bien pour valeur $2a_2 + b_2 \frac{\pi}{2}$ puisque $(a_2, b_2) = (2, 3)$.

II Étude asymptotique

II. 1 Convergence de la suite de terme général A (*k*) /B (*k*)

Les suites croissantes d'entiers $(a_k)_{k\geqslant 1}$ et $(b_k)_{k\geqslant 1}$ ayant l'infini pour limite, on peut comparer leur croissance en considérant le quotient $\frac{a_k}{b_k}$, ou plutôt la suite de terme général

$$\mathrm{C}_k = \frac{\mathrm{A}(k)}{\mathrm{B}(k)},$$

où l'on rappelle que $\mathrm{A}(k) = 2a_k$ et $\mathrm{B}(k) = \frac{b_k}{2}$.

Le calcul des premiers termes ne montre aucune monotonie, mais invite à s'intéresser aux deux suites extraites d'indices pairs et impairs.

D'une part, pour $k \geqslant 1$,

$$\mathrm{C}_{2k+1} = \frac{4a_{2k+1}}{b_{2k+1}} = 4\frac{(2k+2)\,a_{2k}}{(2k+1)\,b_{2k}} = 4\frac{2k\,(2k+2)\,a_{2k-1}}{(2k+1)^2\,b_{2k-1}} = \frac{2k\,(2k+2)}{(2k+1)^2}\mathrm{C}_{2k-1}$$

et $\frac{2k(2k+2)}{(2k+1)^2} = \frac{4k^2+4k}{4k^2+4k+1} < 1$ donc la suite $(\mathrm{C}_{2k-1})_{k\geqslant 1}$ est décroissante. Comme elle est à valeurs positives, elle est convergente.

Mais, pour $k \geqslant 1$, l'on a

$$\frac{\mathrm{C}_{2k+1}}{\mathrm{C}_{2k}} = \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}\frac{b_{2k}}{b_{2k+1}} = \frac{2k+2}{2k+1} \longrightarrow 1$$

donc $\mathrm{C}_{2k} \sim \mathrm{C}_{2k+1}$ et la suite $(\mathrm{C}_{2k})_{k\geqslant 1}$ est convergente, de même limite que $(\mathrm{C}_{2k-1})_{k\geqslant 1}$.

Il en résulte que la suite $(\mathrm{C}_k)_{k\geqslant 1}$ est convergente.

Les suites $(\mathrm{C}_{2k})_{k\geqslant 1}$ et $(\mathrm{C}_{2k-1})_{k\geqslant 1}$ sont-elles adjacentes ?

On calcule, pour $k \geqslant 2$,

$$\mathrm{C}_{2k} = \frac{4a_{2k}}{b_{2k}} = 4\frac{2k\,a_{2k-1}}{(2k+1)\,b_{2k-1}} = 4\frac{(2k)^2\,a_{2k-2}}{(2k+1)\,(2k-1)\,b_{2k-2}} = \frac{(2k)^2}{(2k+1)\,(2k-1)}\mathrm{C}_{2k-2}$$

et $\frac{(2k)^2}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{4k^2}{4k^2-1} > 1$ donc la suite $(\mathrm{C}_{2k})_{k\geqslant 1}$ est bien croissante.

II. 2 Apparition du produit infini de Wallis

Puisque $\mathrm{C}_2 = \frac{8}{3}$, la relation précédente

$$\forall k \geqslant 2, \quad \mathrm{C}_{2k} = \frac{4k^2}{4k^2-1}\mathrm{C}_{2k-2}$$

conduit à l'expression

$$\forall k \geqslant 2, \quad \mathrm{C}_{2k} = \frac{8}{3}\prod_{n=2}^{k}\frac{4n^2}{4n^2-1} = 2\prod_{n=1}^{k}\frac{4n^2}{4n^2-1}.$$

Or JOHN WALLIS a établi (en 1655) que

$$\lim_k \prod_{n=1}^{k}\frac{4n^2}{4n^2-1} = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{\pi}{2}$$

et l'on peut donc affirmer l'étonnant résultat

$$\lim_k \frac{\mathrm{A}(k)}{\mathrm{B}(k)} = \pi.$$

Pour une preuve du produit infini de WALLIS, on peut consulter l'ouvrage[3] de PIERRE EYMARD et JEAN-PIERRE LAFON. Les auteurs établissent que

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{I}_{2n+1}}{\mathrm{I}_{2n}}$$

où I_m désigne l'intégrale de WALLIS

$$\mathrm{I}_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ils montrent que $\lim_n \frac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} = 1$ grâce à l'encadrement classique

$$1 \leqslant \frac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} \leqslant \frac{\mathrm{I}_{2n-1}}{\mathrm{I}_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{2n}.$$

Ces inégalités fournissent aussi

$$0 \leqslant \pi - \mathrm{C}_{2n} \leqslant \frac{\pi}{2n},$$

qui montre que la convergence est très lente.

II. 3 Formules explicites pour a_k et b_k, et équivalents

À partir de leurs relations de définition, on peut expliciter les suites $(a_k)_{k\geqslant 1}$ et $(b_k)_{k\geqslant 1}$. Une récurrence permet d'établir[4] que

$$\forall k \geqslant 1, \quad a_k = 2^{k-1}\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor!\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor! \quad \text{et} \quad b_k = \frac{(k+1)!}{2^k}\binom{k}{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}.$$

L'initialisation est réussie, puisque $(a_1, a_2) = (1,2)$ et $(b_1, b_2) = (1,3)$, et l'hérédité se vérifie par

$$\left|\begin{array}{l} a_{2k+1} = 2k(2k+2)\,a_{2k-1} = 4k(k+1)\,2^{2k-2}(k-1)!k! = 2^{2k}k!(k+1)!, \\[2ex] a_{2k+2} = (2k+2)^2\,a_{2k} = (2k+2)^2\,2^{2k-1}(k!)^2 = 2^{2k+1}((k+1)!)^2, \end{array}\right.$$

3. Pierre Eymard et Jean-Pierre Lafon, *Autour du nombre* π, Hermann, Paris, 1999, p. 42.
4. On trouve ces expressions sur le site de l'OEIS, pour les suites A001900 et A000246 respectivement.

et, si

$$b_{2k}=\frac{(2k+1)!}{2^{2k}}\binom{2k}{k}=(2k+1)\left(\frac{(2k)!}{2^k k!}\right)^2 \text{ et } b_{2k-1}=\frac{(2k)!}{2^{2k-1}}\binom{2k-1}{k-1}=\left(\frac{(2k)!}{2^k k!}\right)^2,$$

alors

$$b_{2k+2}=(2k+3)\,(2k+1)\,b_{2k}=(2k+3)\,\frac{(2k+1)^2\,(2k+2)^2}{(2\,(k+1))^2}\left(\frac{(2k)!}{2^k k!}\right)^2=\frac{(2k+3)!}{2^{2k+2}}\binom{2k+2}{k+1},$$

et enfin

$$b_{2k+1}=(2k+1)^2\,b_{2k-1}=\frac{(2k+1)^2\,(2k+2)^2}{(2\,(k+1))^2}\left(\frac{(2k)!}{2^k k!}\right)^2=\frac{(2k+2)!}{2^{2k+1}}\binom{2k+1}{k},$$

ce qui achève la preuve.

Avec la formule de STIRLING

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n},$$

on obtient les équivalents suivants :

$$a_k\sim\frac{k!}{2}\sqrt{\frac{k\pi}{2}}\quad\text{et}\quad b_k\sim k!\sqrt{\frac{2k}{\pi}},$$

ce qui permet de voir que $2a_k\sim b_k\frac{\pi}{2}$ et l'on retrouve ainsi $\lim\limits_k \mathrm{C}_k=\pi$.

On en déduit aussi que $\mathrm{S}\,(k)=2a_k+b_k\frac{\pi}{2}=4a_k+\mathrm{o}\,(a_k)\sim 4a_k\sim k!\sqrt{2k\pi}$ et, avec la formule de STIRLING,

$$\mathrm{S}\,(k)\sim 2\pi k^{k+1}\mathrm{e}^{-k}.$$

III Une série de LEHMER

III. 1 Une conjecture

L'intérêt du résultat obtenu, à savoir $\mathrm{S}\,(k)=\mathrm{A}\,(k)+\pi\mathrm{B}\,(k)$ avec $\lim_k\frac{\mathrm{A}(k)}{\mathrm{B}(k)}=\pi$, est modéré par la lenteur de cette convergence.

Le mathématicien D. LEHMER a étudié [5] les séries du type

$$\mathrm{T}\,(k)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n^k}{\binom{2n}{n}}$$

et conjecturé [6] (sans l'établir [7]) une forme analogue :

$$\mathrm{T}\,(k)=\mathrm{U}\,(k)+\pi\mathrm{V}\,(k)\quad\text{avec}\quad\lim_k\frac{\mathrm{U}\,(k)}{\mathrm{V}\,(k)}=\pi,$$

5. « Interesting Series Involving the Central Binomial Coefficient », *The American Mathematical Monthly*, vol. 92, nº 7 (août-sept. 1985), p. 447-459 (lire en ligne).

6. Voir aussi la conjecture 3 sur `http://gery.huvent.pagesperso-orange.fr/articlespdf/Autour_primitive.pdf`.

7. Pour une preuve, voir `https://arxiv.org/abs/1009.4274`.

avec une convergence beaucoup plus rapide.

Le calcul des premières sommes donne $\frac{\mathrm{U}(2)}{\mathrm{V}(2)} = \frac{\mathrm{U}(3)}{\mathrm{V}(3)} = \frac{22}{7}$ et pour valeurs approchées :

k	4	5	6	7
$\mathrm{U}(k)/\mathrm{V}(k)$	$3,141592920$	$3,141578064$	$3,141592391$	$3,141592822$

III. 2 Expression de $\mathbf{X}^k$ dans la base $(\mathbf{1}, \mathbf{X}-\mathbf{1}, \ldots, (\mathbf{X}-\mathbf{1})\cdots(\mathbf{X}-\boldsymbol{k}))$

Il est tentant de faire le lien entre les sommes $\mathrm{S}(k)$ et $\mathrm{T}(k)$, en décomposant le polynôme X^k dans la base de $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$ constituée des polynômes $\mathrm{P}_0 = 1, \mathrm{P}_1 = \mathrm{X}-1, \ldots, \mathrm{P}_k = (\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-k)$.

Il faut pour cela adjoindre la valeur $\mathrm{S}(0) = f'(1) = 2a_0 + b_0\frac{\pi}{2}$ avec $(a_0, b_0) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Pour obtenir cette décomposition, on remarque que le nombre d'applications de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ vérifie clairement

$$p^k = \sum_{j=1}^{p} \binom{p}{j} \mathrm{Surj}(k,j),$$

où $\mathrm{Surj}(k,j)$ désigne le nombre d'applications surjectives de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,j]\!]$.

Cela s'écrit encore

$$p^k = \sum_{j=1}^{p} p(p-1)\ldots(p-j+1)\,\sigma(k,j),$$

en posant $\sigma(k,j) = \frac{\mathrm{Surj}(k,j)}{j!}$ (ces entiers sont les nombres de STIRLING de deuxième espèce).

En simplifiant par p et en remplaçant k par $k+1$ ainsi que j par $q+1$ on obtient

$$p^k = \sum_{q=0}^{p-1} (p-1)\ldots(p-q)\,\sigma(k+1,q+1) = \sum_{q=0}^{p-1} \sigma(k+1,q+1)\,\mathrm{P}_q(p).$$

On peut aussi faire varier q de 0 à k puisque $\mathrm{P}_q(p) = 0$ pour $q \geqslant p$ et $\sigma(k+1,q+1) = 0$ pour $q > k$ (car il n'y a alors pas de surjection de $[\![1,k+1]\!]$ dans $[\![1,q+1]\!]$).

On obtient l'égalité $p^k = \sum\limits_{q=0}^{k} \sigma(k+1,q+1)\,\mathrm{P}_q(p)$, qui est valable pour une infinité d'entiers p, donc on a montré l'égalité polynomiale

$$\mathrm{X}^k = \sum_{q=0}^{k} \sigma(k+1,q+1)\,\mathrm{P}_q. \tag{4}$$

De plus, on a la majoration

$$\sigma(k+1,q+1) = \frac{\mathrm{Surj}(k+1,q+1)}{(q+1)!} \leqslant \frac{(q+1)^{k+1}}{(q+1)!} = \frac{(q+1)^k}{q!}. \tag{5}$$

III. 3 La conjecture établie

Avec la décomposition (4) précédente, on obtient la relation

$$\mathrm{T}(k) = \mathrm{U}(k) + \pi \mathrm{V}(k),$$

avec

$$\mathrm{U}(k) = 2\left(\sum_{q=0}^{k} a_q \sigma\left(k+1, q+1\right)\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(k) = \frac{1}{2}\left(\sum_{q=0}^{k} b_q \sigma\left(k+1, q+1\right)\right).$$

On a montré que $2a_k \sim \frac{\pi}{2} b_k$, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que, pour tout $k > n_0$, l'on ait la majoration $\left|2a_k - \frac{\pi}{2} b_k\right| \leqslant \varepsilon \frac{b_k}{2}$.

Pour $k > n_0$, on peut alors écrire

$$|\mathrm{U}(k) - \pi \mathrm{V}(k)| \leqslant \sum_{q=0}^{n_0} \sigma\left(k+1, q+1\right) \left|2a_q - \frac{\pi}{2} b_q\right| + \sum_{q=n_0+1}^{k} \sigma\left(k+1, q+1\right) \varepsilon \frac{b_q}{2},$$

d'où, puisque $2\mathrm{V}(k) \geqslant b_k$ et avec (5),

$$\left|\frac{\mathrm{U}(k)}{\mathrm{V}(k)} - \pi\right| \leqslant \frac{2}{b_k} \sum_{q=0}^{n_0} \frac{\left(q+1\right)^k}{q!} \left|2a_q - \frac{\pi}{2} b_q\right| + \varepsilon,$$

et enfin

$$\left|\frac{\mathrm{U}(k)}{\mathrm{V}(k)} - \pi\right| \leqslant \frac{(n_0+1)^k \mathrm{D}_0}{b_k} + \varepsilon,$$

en posant $\mathrm{D}_0 = \sum_{q=0}^{n_0} \frac{2}{q!} \left|2a_q - \frac{\pi}{2} b_q\right|$.

Puisque $b_k \sim k! \sqrt{\frac{2k}{\pi}}$, on obtient finalement $\left|\frac{\mathrm{U}(k)}{\mathrm{V}(k)} - \pi\right| \leqslant 2\varepsilon$ pour $k > n_1$.

On a donc établi

$$\lim_{k} \frac{\mathrm{U}(k)}{\mathrm{V}(k)} = \pi.$$