

Courbes de poursuites mutuelles

par Antoine Hollard¹

Introduction

Beaucoup d'entre nous se souviennent sans doute d'avoir donné à chercher ou à programmer l'exercice suivant, en maths ou en physique.

Quatre chiens (ou quatre mouches ou quatre coccinelles) A, B, C, D occupent à l'instant 0 les sommets d'un carré. A poursuit B qui poursuit C qui poursuit D qui poursuit A. On suppose qu'ils ont tous la même vitesse numérique V constante.

Quelles courbes parcourent-ils?

Les courbes décrites par A, B, C, D sont alors des spirales logarithmiques qui se rejoignent au centre du carré à l'instant T égal à $\frac{a_0}{V}$, où a_0 est la longueur du côté du carré initial.

On peut poser le même problème avec trois chiens A, B, C seulement, placés à l'instant 0 aux sommets d'un triangle équilatéral. A poursuit B qui poursuit C qui poursuit A avec des vitesses constantes et égales. On trouve encore des courbes qui sont des spirales logarithmiques qui se rejoignent au centre du triangle à l'instant $T = \frac{2a_0}{3V}$, où a_0 est la longueur commune des côtés du triangle initial.

Ce problème a été étudié et résolu, en particulier par Édouard Lucas en 1877.

Nous allons étudier un cas un peu plus général où les trois chiens occupent à l'instant 0 les sommets d'un triangle quelconque.

I Généralités

I.1 Énoncé du problème

Trois points mobiles $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ du plan vérifient la condition suivante : à chaque instant, les vecteurs vitesse $\frac{d\vec{A}}{dt}$, $\frac{d\vec{B}}{dt}$, $\frac{d\vec{C}}{dt}$ sont respectivement colinéaires aux vecteurs \vec{AB} ,

1. cosinushollard@yahoo.fr

\overrightarrow{BC} et \overrightarrow{CA} , et de même sens qu'eux. Les vitesses numériques de A, B, C sont des fonctions de t notées V_A, V_B, V_C , qui sont supposées connues, strictement positives et de classe \mathcal{C}^1 .

Sur tout intervalle $I = [0, z[$ où A, B, C sont distincts, les coordonnées $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C$ de A, B, C dans un repère fixe vérifient donc un système de six équations différentielles :

$$x'_A = \frac{V_A(x_B - x_A)}{\left((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2\right)^{1/2}},$$

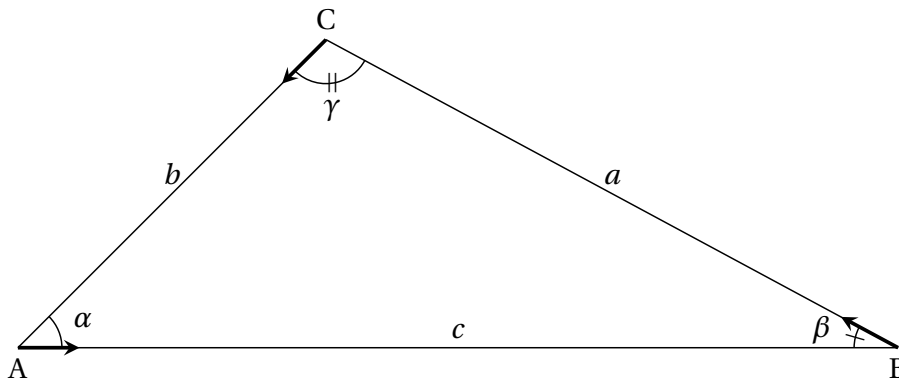
et des équations analogues pour $y'_A, x'_B, y'_B, x'_C, y'_C$.

Connaissant les fonctions V_A, V_B, V_C , le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'assurer l'existence et l'unicité des fonctions solutions si on donne les positions initiales $A(0), B(0), C(0)$. Les fonctions solutions, donc les fonctions $t \mapsto A(t), t \mapsto B(t)$ et $t \mapsto C(t)$ sont de classe \mathcal{C}^2 puisque V_A, V_B, V_C sont de classe \mathcal{C}^1 .

On cherche si les poursuivants finissent par se rejoindre; si c'est le cas, en quel point et à quel instant, et ce que l'on peut dire de leurs trajectoires.

I.2 Définitions et notations

Dans le triangle $A(t)B(t)C(t)$, nous allons noter les longueurs des côtés $c(t) = A(t)B(t)$, $a(t) = B(t)C(t)$, $b(t) = C(t)A(t)$; les fonctions a, b, c sont de classe \mathcal{C}^2 sur tout intervalle où elles ne s'annulent pas. Les mesures des angles en A, B, C sont notés respectivement α, β, γ , compris entre 0 et π , avec $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.



Sur tout intervalle où $A(t), B(t)$ et $C(t)$ ne sont pas alignés, les fonctions α, β, γ , fonctions de t , sont de classe \mathcal{C}^2 . En effet, α, β, γ sont dans $]0, \pi[$ et on a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, soit $\alpha = \text{Arccos} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, qui est bien de classe \mathcal{C}^2 .

À l'instant t , l'enveloppe convexe $K(t)$ des trois points $A(t), B(t), C(t)$ (le triangle plein de sommets $A(t), B(t), C(t)$) est compacte. Si A, B, C sont alignés, $K(t)$ est un segment.

On considère que le mouvement s'arrête si les trois points se rejoignent. Si d'autre part A rejoint B à l'instant t_0 en restant distinct de C, alors on convient que A et B restent confondus pour $t > t_0$; le système différentiel énoncé en I.1 n'a plus de sens; il ne reste que deux points B et C qui vont l'un vers l'autre.

I.3 Décroissance de la famille de compacts $K(t)$

Soit I un intervalle semi-ouvert à droite, d'origine $t = 0$, tel que, pour tout t dans I , $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ sont distincts et non alignés.

Lemme 1. Soit $t_0 \in I$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in [t_0, t_0 + \varepsilon], K(t) \subset K(t_0)$.

Démonstration. On fixe un repère orthonormé direct dont l'axe Ox est porté par $A(t_0)B(t_0)$, et tel que $C(t_0)$ a une ordonnée strictement positive. L'ordonnée de $C(t)$ est alors strictement positive au voisinage de t_0 . Le point $B(t)$ a pour ordonnée $y_B(t)$, avec $y_B(t_0) = 0$. Comme son vecteur vitesse est dirigé par \overrightarrow{BC} et de même sens, $y'_B(t_0) > 0$. Donc, sur un intervalle $[t_0, t_0 + \varepsilon_1]$, $y_B(t) > 0$.

Le point $A(t)$ a pour ordonnée $y_A(t)$, avec $y_A(t_0) = y'_A(t_0) = 0$. Comme $\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}$ est dirigée par \overrightarrow{AB} et de même sens, on a $y'_A = k(y_B - y_A)$, avec $k > 0$.

En dérivant, $y''_A = k'(y_B - y_A) + k(y'_B - y'_A)$, d'où l'on tire $y''_A(t_0) = k(t_0)y'_B(t_0) > 0$. Donc $y_A(t) \sim_{t_0} \frac{1}{2}(t - t_0)^2 y''_A(t_0)$ et donc $y_A(t)$ est strictement positif au voisinage de t_0 . Donc, sur un intervalle $[t_0, t_0 + \varepsilon_2]$, les trois points $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ sont dans le demi-plan fermé limité par $A(t_0)B(t_0)$ et contenant $C(t_0)$. Il en est donc de même pour $K(t)$.

On montrerait de même que, sur un intervalle $[t_0, t_0 + \varepsilon_3]$, $K(t)$ est contenu dans le demi-plan fermé limité par $B(t_0)C(t_0)$ et contenant $A(t_0)$; et que, sur un intervalle $[t_0, t_0 + \varepsilon_4]$, $K(t)$ est contenu dans le demi-plan fermé limité par $C(t_0)A(t_0)$, et contenant $B(t_0)$.

Donc, sur un intervalle $[t_0, t_0 + \varepsilon]$, $K(t)$ est contenu dans $K(t_0)$, intersection de ces trois demi-plans. \square

Théorème 2. Pour $t \in I$, les compacts $K(t)$ forment une famille décroissante au sens de l'inclusion.

Démonstration. Soient a et b dans I tels que $a < b$. On va montrer que $K(b) \subset K(a)$. Supposons que $K(b) \not\subset K(a)$. Soit alors $\tau = \inf\{t \in [a, b] \mid K(t) \not\subset K(a)\}$. D'après le lemme 1, $\tau > a$.

- Montrons que $K(\tau) \subset K(a)$ Soit (t_n) une suite strictement croissante convergeant vers τ . Soit M un point de $K(\tau)$; M est barycentre de $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$ avec des coefficients u, v, w positifs. Soit, pour n fixé, M_n le barycentre de $A(t_n)$, $B(t_n)$, $C(t_n)$ affectés des mêmes coefficients u, v, w . Comme $t_n < \tau$, $K(t_n) \subset K(a)$ et le point M_n est dans $K(a)$. Quand n tend vers $+\infty$, les points $A(t_n)$, $B(t_n)$, $C(t_n)$ tendent vers $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$ et M_n tend vers M . Comme $K(a)$ est fermé, $M \in K(a)$. Donc $K(\tau) \subset K(a)$.

- Si on suppose $\tau < b$, sur un intervalle $[\tau, \tau + \varepsilon]$, $K(t) \subset K(\tau) \subset K(a)$ d'après le lemme 1. D'où la contradiction, donc $\tau = b$ et $K(b) \subset K(a)$. \square

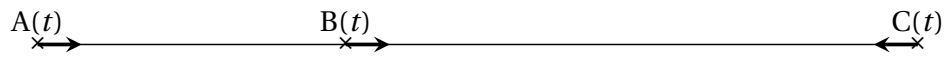
I.4 Extension au cas où le triangle $K(t)$ s'aplatit

Le résultat reste vrai si le triangle s'aplatit.

Théorème 3. Les compacts convexes $K(t)$ forment, sur tout l'intervalle où le mouvement existe, une famille décroissante au sens de l'inclusion.

Démonstration.

• Supposons qu'à un instant t_0 , $A(t_0)$, $B(t_0)$, $C(t_0)$ sont alignés au sens large (deux des points peuvent être confondus); alors $K(t)$ est un segment contenu dans $K(t_0)$ pour $t > t_0$.



Il est clair que la famille de compacts $K(t)$, avec $t \geq t_0$, est encore décroissante au sens de l'inclusion.

• Supposons qu'au départ, $A(0)$, $B(0)$, $C(0)$ sont distincts et non alignés et que le triangle s'aplatit en cours de route. Soit $E = \{t \geq 0 \mid A(t), B(t), C(t) \text{ sont alignés au sens large}\}$. Alors E est fermé car il est déterminé par l'équation en t $\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

Soit $t_0 = \inf E$; t_0 est dans E et $t_0 > 0$ par hypothèse sur les conditions initiales. Soit $a < t_0$. Soit une suite (t_n) partant de a et strictement croissante vers t_0 . Pour n quelconque, $K(t_n)$ est contenu dans $K(a)$ d'après le lemme 1. Comme $A(t_n)$, $B(t_n)$, $C(t_n)$ tendent respectivement vers $A(t_0)$, $B(t_0)$, $C(t_0)$ quand n tend vers $+\infty$, $A(t_0)$, $B(t_0)$, $C(t_0)$ appartiennent à $K(a)$ et $K(t_0) \subset K(a)$.

Donc les compacts convexes $K(t)$ forment, sur tout l'intervalle où le mouvement existe, une famille décroissante au sens de l'inclusion. \square

I.5 Périmètre et aire du triangle ABC**a. Périmètre**

Les fonctions a , b , c sont de classe \mathcal{C}^1 et on trouve, en dérivant $c^2 = AB^2$, la formule des vitesses suivante si les trois points sont distincts : $c' = -(V_A + V_B \cos \beta)$, et de même $a' = -(V_B + V_C \cos \gamma)$ et $b' = -(V_C + V_A \cos \alpha)$.

En notant $P = a + b + c$ le périmètre du triangle ABC, on trouve donc

$$P' = -V_A(1 + \cos \alpha) - V_B(1 + \cos \beta) - V_C(1 + \cos \gamma) \leq 0.$$

La fonction $t \mapsto P(t)$ est donc décroissante. Ce résultat reste vrai si deux des trois points sont confondus à partir d'un instant t .

Deux possibilités : ou bien $P(t)$ finit par s'annuler à un instant T ou à l'infini, et les trois points se rejoignent à cet instant; ou bien $P(t)$ a une limite strictement positive quand t tend vers $+\infty$, et les trois poursuivants ne se rattrapent pas. Une étude plus précise de ce second cas est faite dans le paragraphe suivant I.6.

Remarque. Si les trois points se rejoignent, pour trouver le point de jonction, il suffit de trouver un point fixe contenu dans tous les compacts $K(t)$.

b. Aire

Soit S l'aire du triangle ABC. On sait d'après I.3 que ces triangles pleins forment une famille décroissante au sens de l'inclusion quand t varie. **Donc la fonction $t \mapsto S(t)$ est décroissante et positive.**

D'autre part, l'aire S et le périmètre P vérifient l'inégalité suivante :

$$S \leq \frac{1}{\sqrt{3}} P^2,$$

l'égalité étant obtenue si et seulement si le triangle est équilatéral. Voici une démonstration de ce résultat classique.

Démonstration. On part de la formule

$$S^2 = \frac{1}{16}P(P-2a)(P-2b)(P-2c).$$

On cherche le maximum, pour P fixé, de $(P-2a)(P-2b)(P-2c)$, avec $a, b, c \geq 0$ et $a+b+c = P$. Soit la fonction F_1 définie par $F_1(x, y) = (P-2x)(P-2y)(2x+2y-P)$ sur la partie triangulaire du plan définie par

$$0 \leq x \leq \frac{P}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{P}{2}, \quad x+y \geq \frac{P}{2}.$$

Aux bords de cette partie, $F_1(x, y)$ est nul. Donc son maximum est atteint à l'intérieur de cette partie, en un point où le gradient de F_1 est nul. Or

$$\partial_x F_1(x, y) = (P-2y)(2(P-2x) - 2(2x+2y-P)) = 0 \iff P-2x-y=0.$$

De même, $\partial_y F_1(x, y) = 0 \iff P-2y-x=0$. Donc le maximum est atteint pour $x = y = \frac{P}{3}$ et l'inégalité est démontrée. \square

I.6 Cas où les poursuivants ne se rattrapent pas

Soit K_∞ l'intersection décroissante de tous les compacts $K(t)$ pour $t \geq 0$. La suite des triplets $(A(n), B(n), C(n))$ de points du plan est bornée. On peut donc en extraire une suite $(A(\varphi(n)), B(\varphi(n)), C(\varphi(n)))$ qui converge vers un triplet $(A_\infty, B_\infty, C_\infty)$.

Soit E l'enveloppe convexe de $\{A_\infty, B_\infty, C_\infty\}$, c'est-à-dire le triangle plein de sommets ces trois points. Montrons que $E = K_\infty$.

- Pour t quelconque, les trois points $A(\varphi(n))$, $B(\varphi(n))$, $C(\varphi(n))$ appartiennent à $K(t)$ dès que $\varphi(n) > t$. Donc A_∞ , B_∞ , C_∞ appartiennent à $K(t)$ qui est fermé. Donc E est contenu dans $K(t)$ pour t quelconque, donc est contenu dans K_∞ .
- Si un point M est extérieur au triangle formé par A_∞ , B_∞ , C_∞ , il est extérieur au triangle formé par $A(\varphi(n))$, $B(\varphi(n))$, $C(\varphi(n))$ pour n assez grand, donc n'appartient pas à K_∞ . Donc K_∞ est contenu dans E .

Pour toute autre suite (t_n) tendant vers l'infini, on peut extraire une suite $\psi(t_n)$ telle que le triplet $(A(\psi(t_n)), B(\psi(t_n)), C(\psi(t_n)))$ converge vers un triplet (A', B', C') . Par le même raisonnement, on trouve que le triangle plein formé par A' , B' , C' est K_∞ , et donc que $(A', B', C') = (A_\infty, B_\infty, C_\infty)$. Donc les trois points $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ tendent respectivement vers A_∞ , B_∞ , C_∞ quand t tend vers $+\infty$. Les trois trajectoires admettent chacune un point asymptote.

II Cas de vitesses égales. Possibilité de rencontre

II.1 Encadrement de $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$

Cherchons un encadrement de l'expression $X = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$, pour $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, avec α, β, γ dans $[0, \pi]$.

a. Minimum

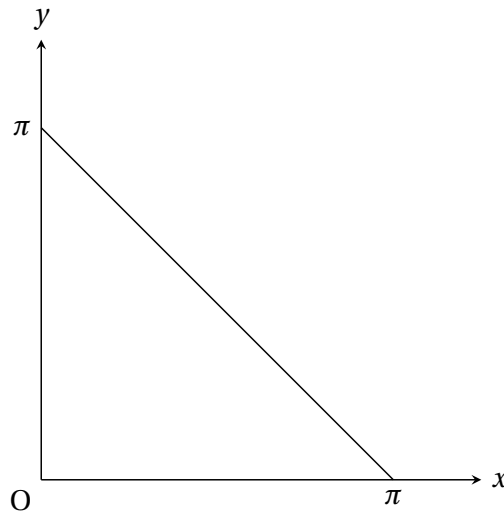
Comme $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, on peut facilement vérifier, en remplaçant γ par $\pi - \alpha - \beta$, que

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \geq 1.$$

Le minimum de $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$ pour $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, avec α, β, γ dans $[0, \pi]$, est donc égal à 1.

b. Maximum

Cherchons le maximum de cette expression. Soit $F_2(x, y) = \cos x + \cos y - \cos(x + y)$. On cherche le maximum de F_2 sur la partie triangulaire du plan déterminée par $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, $x + y \leq \pi$.



Ce maximum n'est pas atteint au bord du triangle : $F_2(x, 0) = F_2(0, y) = 1$ et, si $x + y = \pi$, $F_2(x, y) = -\cos \pi = 1$. Le maximum est donc atteint à l'intérieur du triangle, en un point où le gradient de F_2 est nul.

Or $\partial_x F_2(x, y) = -\sin x + \sin(x + y)$ et $\partial_y F_2(x, y) = -\sin y + \sin(x + y)$. Le gradient de F_2 est nul pour $\sin x = \sin y = \sin(x + y)$, avec $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$ et $x + y < \pi$. La seule possibilité est $x = y$ et $x + y = \pi - x$, ce qui donne $x = y = \frac{\pi}{3}$.

Le maximum de $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$, pour $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, avec α, β, γ dans $[0, \pi]$, est donc égal à $\frac{3}{2}$.

Remarquons que ce maximum correspond au cas où le triangle ABC est équilatéral.

II.2 Possibilité de rencontre avec des vitesses identiques

On ajoute à partir d'ici l'hypothèse suivante : on suppose que les vitesses numériques des trois points A, B, C sont égales entre elles à chaque instant. Soit $V(t)$ leur valeur commune à l'instant t , supposée connue et strictement positive.

a. Encadrement de $P'(t)$

On a $P' = -V(3 + \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$.

D'après l'encadrement trouvé en II.1, $-4V \geq P' \geq -\frac{9}{2}V$. La fonction P est donc strictement décroissante, et positive ou nulle.

b. Une condition de jonction

On cherche si les trois points finissent par se rejoindre. On trouve d'abord un encadrement pour $P(t)$.

$$4 \int_0^t V(u) du \leq P(0) - P(t) \leq \frac{9}{2} \int_0^t V(u) du,$$

donc

$$P(0) - \frac{9}{2} \int_0^t V(u) du \leq P(t) \leq P(0) - 4 \int_0^t V(u) du.$$

Il y a deux possibilités, selon que l'intégrale généralisée de V sur $[0, +\infty[$ est convergente ou divergente.

Si l'intégrale est divergente, il existe nécessairement un instant T pour lequel P s'annule, et T vérifie

$$4 \int_0^T V(u) du \leq P(0) \leq \frac{9}{2} \int_0^T V(u) du.$$

Si l'intégrale est convergente, il n'est pas sûr, selon que les trois points sont au départ, assez éloignés ou non les uns des autres, que $P(t)$ finisse par s'annuler. Plus précisément, si $\frac{9}{2} \int_0^{+\infty} V(u) du < P(0)$, on est sûr que P ne peut pas s'annuler. En revanche, si le périmètre initial vérifie $P(0) < 4 \int_0^{+\infty} V(u) du$, on est sûr que P finit par s'annuler et que les trois points se rejoignent à un instant T .

II.3 Courbures des courbes décrites par A, B, C

Soient (\vec{T}_A, \vec{N}_A) , (\vec{T}_B, \vec{N}_B) et (\vec{T}_C, \vec{N}_C) les repères de Frenet associés à l'instant t aux courbes respectives décrites par A, B, C.

Soient ρ_A, ρ_B, ρ_C les courbures respectives de ces courbes à l'instant t .

Alors $\vec{AB} = c \vec{T}_A$. En dérivant, on trouve $\frac{d\vec{B}}{dt} - \frac{d\vec{A}}{dt} = c' \vec{T}_A + cV\rho_A \vec{N}_A$.

Donc $V\vec{T}_B = (V + c') \vec{T}_A + cV\rho_A \vec{N}_A$. D'où $V + c' = -V \cos \beta$ et $cV\rho_A = V \sin \beta$.

La première égalité n'apporte rien, mais la deuxième permet d'écrire $c\rho_A = \sin \beta$.

De même, $a\rho_B = \sin \gamma$ et $b\rho_C = \sin \alpha$.

II.4 Propriétés des centres de courbure

a. Construction géométrique

On déduit de II.3 une construction géométrique possible des centres de courbure.

Soit $I(t)$ le centre de courbure de la courbe décrite par A à l'instant t . On a $\frac{c}{IA} = \sin \beta$.

On trace la médiatrice du segment AB. Elle coupe le côté BC en un point A' . Soit A'' le point d'intersection de la droite AA' et du cercle centré en A et passant par B. Alors I est le point d'intersection de la perpendiculaire en A'' à AA'' et de la perpendiculaire en A à AB.

b. Utilisation des complexes

Pour un point M du plan, soit z_M son affixe.

Le résultat du II.3 permet d'écrire $z_I - z_A = i \frac{z_B - z_A}{\sin \beta}$. Donc

$$z_I = z_A \left(1 - \frac{i}{\sin \beta} \right) + i \frac{z_B}{\sin \beta}.$$

De même, si J est le centre de courbure de la courbe décrite par B, et K le centre de courbure de la courbe décrite par C, on a

$$z_J = z_B \left(1 - \frac{i}{\sin \gamma} \right) + i \frac{z_C}{\sin \gamma} \quad \text{et} \quad z_K = z_C \left(1 - \frac{i}{\sin \alpha} \right) + i \frac{z_A}{\sin \alpha}.$$

On en tire $z_I \sin \beta + z_J \sin \gamma + z_K \sin \alpha = z_A \sin \beta + z_B \sin \gamma + z_C \sin \alpha$, soit vectoriellement $\sin \beta \vec{AI} + \sin \gamma \vec{BJ} + \sin \alpha \vec{CK} = \vec{0}$, soit encore

$$b\vec{AI} + c\vec{BJ} + a\vec{CK} = \vec{0}.$$

II.5 Trajectoire du centre de gravité du triangle ABC

Soit $G(t)$ l'isobarycentre des sommets $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$.

La fonction $t \mapsto G(t)$ est de classe \mathcal{C}^2 et $\vec{G}' = \frac{1}{3}V(\vec{T}_A + \vec{T}_B + \vec{T}_C)$. Or

$$\vec{T}_A \cdot \vec{T}_B = -\cos \beta, \quad \vec{T}_B \cdot \vec{T}_C = -\cos \gamma, \quad \vec{T}_C \cdot \vec{T}_A = -\cos \alpha,$$

donc $\|\vec{G}'\|^2 = \frac{1}{9}V^2(3 - 2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma))$. Donc $\|\vec{G}'\|^2 = V^2 + \frac{2}{9}VP'$, soit encore

$$P' = \frac{9}{2} \frac{\|\vec{G}'\|^2}{V} - \frac{9}{2}V.$$

Grâce aux inégalités de II.1, on remarque au passage que $\|\vec{G}'\| \leq \frac{1}{3}V$.

Supposons que les trois poursuivants se rejoignent à l'instant T. Soit λ la valeur commune des longueurs des trajectoires de A, B, C. On a donc

$$\lambda = \frac{2}{9}P(0) + \int_0^T \frac{\|\vec{G}'(t)\|^2}{V(t)} dt.$$

III Cas de vitesses égales et constantes

On suppose dans cette partie que les vitesses numériques des trois points sont égales entre elles et constantes. Soit V leur valeur commune, $V > 0$.

III.1 Système vérifié par les longueurs des côtés

On a $c' = -V(1 + \cos \beta)$. Or $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$. En remplaçant, on trouve

$$c' = V \frac{b^2 - (a+c)^2}{2ac} = \frac{VP(b-a-c)}{2ac}.$$

De même,

$$b' = V \frac{a^2 - (b+c)^2}{2bc} = \frac{VP(a-b-c)}{2bc}.$$

$$a' = V \frac{c^2 - (a+b)^2}{2ab} = \frac{VP(c-a-b)}{2ab}.$$

Les fonctions a, b, c sont donc solutions d'un système dynamique autonome (S).

III.2 Instant de la rencontre

En utilisant le résultat de II.2, on est sûr que les trois points se rencontrent à un instant T tel que $4VT \leq P(0) \leq \frac{9}{2}VT$, c'est-à-dire $\frac{2}{9} \frac{P(0)}{V} \leq T \leq \frac{1}{4} \frac{P(0)}{V}$, ce qui donne une estimation de T connaissant $P(0)$ et V .

Plus précisément, on trouve alors, grâce à l'égalité établie en II.5,

$$T = \frac{2}{9} \frac{P(0)}{V} + \int_0^T \frac{\|\vec{G}'(t)\|^2}{V^2} dt.$$

III.3 Les points A, B, C restent-ils toujours distincts et non alignés?

Il est sûr d'après I.5.b. que S s'annule à un instant $T_1 \leq T$, c'est-à-dire que A, B, C sont alignés à partir de cet instant. *A priori*, il est donc possible que le triangle s'aplatisse avant la rencontre des trois points. Il est aussi tout à fait possible que deux des trois poursuivants se rejoignent avant d'aller vers le troisième. Voir la figure 1 ci-dessous, où l'on a arrêté le programme de construction quand B a rejoint C.

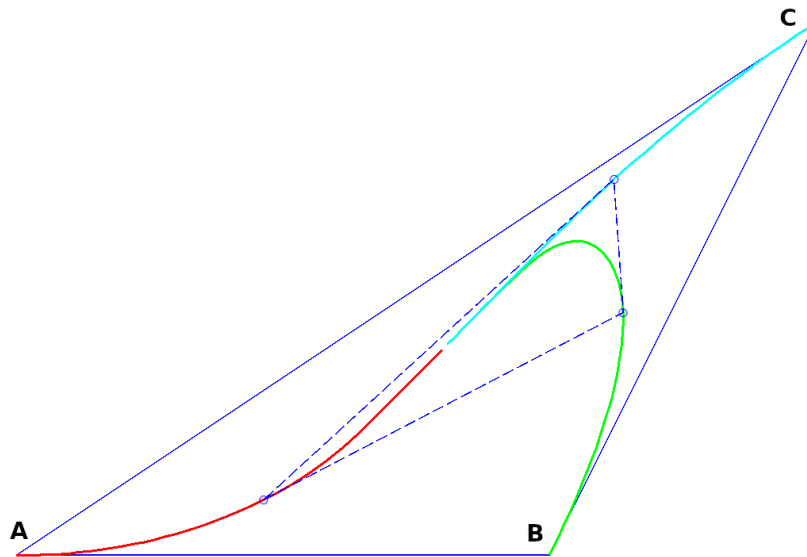


Figure 1. B a rejoint C qui n'a pas encore rejoint A.

III.4 Étude d'un cas particulier

On suppose ici que, pour $t = 0$, les trois points $A(0)$, $B(0)$, $C(0)$ sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Comme, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le système dynamique (S) trouvé en III.1 a une seule solution déterminée par les conditions initiales portant sur a , b , c , le système (S) sera équivalent dans ce cas à $a' = -\frac{3}{2}V$, et $b = c = a$.

Le triangle reste équilatéral dans le mouvement, l'isobarycentre G des trois sommets reste fixe, donc sera le point de rencontre de A , B , C . D'autre part, l'angle entre GA et la tangente en A reste constant, donc la courbe décrite par A est une spirale logarithmique, de même que les courbes décrites par B et C .

IV Point de rencontre. Retour au cas de vitesses quelconques

On revient ici à la situation générale décrite en I : les vitesses des trois points, V_A , V_B , V_C sont des fonctions quelconques de t , de classe \mathcal{C}^1 et strictement positives ; les positions initiales de A , B , C sont les sommets d'un triangle quelconque. On suppose simplement que $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ restent distincts et non alignés jusqu'à leur rencontre.

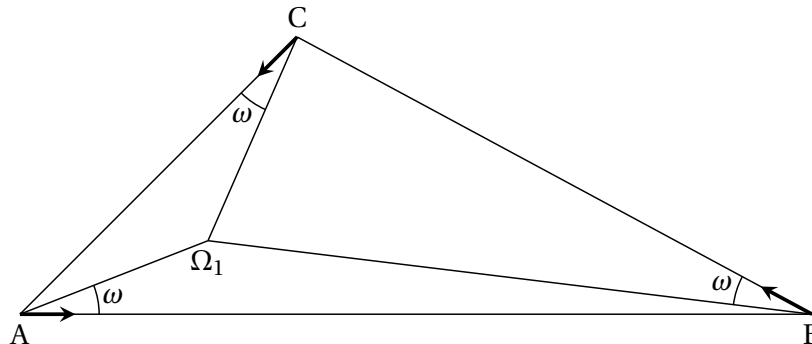
Certains auteurs — R. K. Miller (1871), Arthur Bernhart (1959) — prouvent que le point de rencontre est un des points de Brocard du triangle initial. Mais, pour cela, ils ajoutent l'hypothèse suivante : ils supposent que le triangle $A(t)B(t)C(t)$ reste semblable au triangle initial au cours du mouvement. Malheureusement, cette hypothèse est très restrictive, elle impose des contraintes importantes sur les vitesses respectives de A , B , C , qui ne sont pas nécessairement égales, et sur les positions initiales des trois points.

Étudions de plus près cette question.

IV.1 Points de Brocard d'un triangle

On rappelle ce que sont les points de Brocard d'un triangle ABC .

Il existe un unique point Ω_1 intérieur au triangle tel que les angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega_1})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B\Omega_1})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C\Omega_1})$ soient égaux. C'est le premier point de Brocard du triangle, qui est aussi le barycentre des points pondérés $(A, ac/b)$, $(B, ab/c)$, $(C, bc/a)$.



Il existe de même un unique point Ω_2 intérieur au triangle tel que les angles $(\overrightarrow{A\Omega_2}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{B\Omega_2}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{C\Omega_2}, \overrightarrow{CB})$ soient égaux. C'est le deuxième point de Brocard du triangle, qui est aussi le barycentre des points pondérés $(A, ab/c)$, $(B, bc/a)$, $(C, ca/b)$.

Ces six angles ont pour mesure commune ω (comprise entre 0 et π) qui vérifie

$$\cotan \omega = \cotan \alpha + \cotan \beta + \cotan \gamma.$$

IV.2 Rencontre au premier point de Brocard?

Regardons par exemple le cas où les vitesses sont égales : $V_A = V_B = V_C = V(t)$. Supposons que la propriété de rencontre au premier point de Brocard soit vraie quelles que soient les positions de A, B, C à l'instant $t = 0$.

Le point de rencontre des trois points à partir de $t = 0$ est le même que le point de rencontre à partir de tout instant t . Donc le premier point de Brocard Ω_1 du triangle ABC est fixe.

Posons $r_A = A\Omega_1$, $r_B = B\Omega_1$, $r_C = C\Omega_1$. En dérivant, on trouve $r'_A = -V \cos \omega = r'_B = r'_C$. Les différences $A\Omega_1 - B\Omega_1$ et $A\Omega_1 - C\Omega_1$ sont donc constantes. Comme $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ finissent par se rencontrer, $A\Omega_1 = B\Omega_1 = C\Omega_1$. Les triangles $AB\Omega_1$, $BC\Omega_1$, $CA\Omega_1$ sont donc isocèles. Donc $\alpha - \omega = \omega = \beta - \omega = \gamma - \omega$ et le triangle ABC est équilatéral.

Si on part d'un triangle ABC non équilatéral, il n'y a aucune raison pour que $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ se rejoignent au premier point de Brocard du triangle.

IV.3 Condition de jonction au premier point de Brocard

Soient les propriétés éventuelles suivantes des trajectoires, supposées telles que A, B, C restent non alignés :

- (i) Les triangles $A(t)B(t)C(t)$ restent semblables, au cours du mouvement, au triangle initial.
- (ii) Les vitesses V_A, V_B, V_C sont de la forme $V_A = kb^2c$, $V_B = kc^2a$, $V_C = ka^2b$, où k est une fonction de t , strictement positive et de classe \mathcal{C}^1 .
- (iii) Le premier point de Brocard de tous les triangles $A(t)B(t)C(t)$ reste fixe au cours du mouvement, et c'est le point de jonction des trois poursuivants.
- (iv) Les courbes décrites par $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ sont des spirales logarithmiques.

a. Équivalence des propriétés (i) et (ii)

Remarquons que la propriété (i) est équivalente au fait que $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{c}$ restent constants, donc que $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$, ou encore que les fonctions α, β, γ sont constantes.

Démonstration.

- Sens (ii) \implies (i)

On suppose (ii). La formule des vitesses trouvée en I.5 permet d'écrire

$$-c' = kb^2c + kc^2a \cos \beta = kc \left(b^2 + \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) \right) = \frac{1}{2}kc(a^2 + c^2 + b^2).$$

En posant $m = a^2 + b^2 + c^2$, on trouve donc $c' = -\frac{1}{2}ckm$, et de même $a' = -\frac{1}{2}akm$ et $b' = -\frac{1}{2}bkm$. On a bien $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ et (i) est vérifiée.

- Sens (i) \implies (ii)

En partant de $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$, on trouve

$$\frac{V_A + V_B \cos \beta}{c} = \frac{V_B + V_C \cos \gamma}{a} = \frac{V_C + V_A \cos \alpha}{b}.$$

Introduisons trois fonctions λ , μ et ν telles que $V_A = \lambda b^2 c$, $V_B = \mu c^2 a$, $V_C = \nu a^2 b$. On a alors $\lambda b^2 + \mu c a \cos \beta = \mu c^2 + \nu a b \cos \gamma = \nu a^2 + \lambda b c \cos \alpha$. Or $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$ (relations entre angles et côtés d'un triangle). Donc $\lambda b^2 + \mu c a \cos \beta = \mu c^2 + \nu a b \cos \gamma$, soit encore $\lambda b^2 = \mu c b \cos \alpha + \nu a b \cos \gamma$, soit finalement

$$\lambda b = \mu c \cos \alpha + \nu a \cos \gamma. \quad (1)$$

De même, $b = a \cos \gamma + c \cos \alpha$, donc $\lambda b^2 + \mu c a \cos \beta = \nu a^2 + \lambda b c \cos \alpha$. Il en résulte $\lambda b a \cos \gamma = \nu a^2 - \mu c a \cos \beta$, soit finalement

$$\lambda b c \cos \gamma = \nu a - \mu c \cos \beta. \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) impliquent $\mu c \cos \alpha \cos \gamma + \nu a \cos^2 \gamma = \nu a - \mu c \cos \beta$.

Comme $\alpha + \gamma = \pi - \beta$, on en déduit $\mu c \sin \alpha \sin \gamma = \nu a \sin^2 \gamma$, donc $\mu c \sin \alpha = \nu a \sin \gamma$. Comme $c \sin \alpha = a \sin \gamma$, on obtient $\mu = \nu$. En reportant dans (1), on trouve $\lambda = \mu = \nu$.

Finalement, (i) et (ii) sont équivalentes. \square

Remarque. Si cette propriété est vérifiée, on obtient, grâce aux relations trouvées entre m , a , b et c , que $m' = -km^2$. Donc $\frac{1}{m} = q + \frac{1}{m(0)}$, où q est la primitive de k s'annulant en 0. La fonction m est strictement décroissante; si k est définie sur $[0, +\infty[$, m tend vers 0 en $+\infty$ si et seulement si l'intégrale généralisée de k sur $[0, +\infty[$ est divergente. Les trois points se rejoignent alors, mais au bout d'un temps infini.

b. La propriété (i) entraîne les trois autres

Démonstration. Supposons que (i) (ou (ii)) soit réalisée et que les trois points finissent par se rejoindre. Pour montrer que le point de jonction des trois poursuivants est le premier point de Brocard du triangle initial, il suffit de montrer, d'après I.5.a., que pour t quelconque, le point de Brocard $\Omega_1(t)$ du triangle $A(t)B(t)C(t)$ est fixe.

Soit $D = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2$. Les coordonnées barycentriques normalisées de $\Omega_1(t)$ par rapport à $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ sont $x = \frac{c^2 a^2}{D}$, $y = \frac{a^2 b^2}{D}$, $z = \frac{b^2 c^2}{D}$. Comme les triangles ABC restent semblables entre eux, x , y , z ne dépendent pas de t . Or $\overrightarrow{A\Omega_1} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$. Donc

$$\overrightarrow{\Omega_1}' = \frac{d\overrightarrow{A}}{dt} + y \left(\frac{d\overrightarrow{B}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{A}}{dt} \right) + z \left(\frac{d\overrightarrow{C}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{A}}{dt} \right) = V_A \overrightarrow{T}_A + y(V_B \overrightarrow{T}_B - V_A \overrightarrow{T}_A) + z(V_C \overrightarrow{T}_C - V_A \overrightarrow{T}_A).$$

Or $\overrightarrow{T}_C = -\frac{1}{b} (a\overrightarrow{T}_B + c\overrightarrow{T}_A)$. Dans la base $(\overrightarrow{T}_A, \overrightarrow{T}_B)$, les coordonnées (x_0, y_0) de $\overrightarrow{\Omega_1}'$ vérifient donc

$$x_0 = V_A - yV_A - \frac{zc}{b}V_C - zV_A = xV_A - \frac{zc}{b}V_C \quad \text{et} \quad y_0 = yV_B - \frac{za}{b}V_C.$$

Comme $z = \frac{b^2 x}{a^2}$ et que $V_C = \frac{a^2 V_A}{bc}$, $x_o = 0$. Et comme $z = \frac{yc^2}{a^2}$ et que $V_C = \frac{abV_B}{c^2}$, $y_o = 0$.
Donc le point Ω_1 est fixe, et c'est donc le point de rencontre des trois poursuivants.

D'autre part, comme les triangles ABC sont semblables entre eux, α, β, γ sont constants, donc ω défini par $\cotan \omega = \cotan \alpha + \cotan \beta + \cotan \gamma$ est constant. Donc l'angle entre $\overrightarrow{\Omega_1 A}$ et $\overrightarrow{T_A}$, dont une mesure est ω , est constant, et $A(t)$ décrit bien une spirale logarithmique qui s'enroule autour de Ω_1 . Il en est de même pour $B(t)$ et $C(t)$. □

c. Les propriétés (iii) et (iv) entraînent (i)

Démonstration. Supposons donc que Ω_1 est le point de rencontre et que $A(t), B(t), C(t)$ décrivent des spirales logarithmiques qui s'enroulent autour de Ω_1 .

Posons $r_A = A\Omega_1, r_B = B\Omega_1, r_C = C\Omega_1$. En dérivant (par rapport à t) r_A, r_B, r_C on trouve $r'_A = -V_A \cos \omega, r'_B = -V_B \cos \omega, r'_C = -V_C \cos \omega$. Les relations entre angles et côtés d'un triangle permettent d'écrire :

- dans le triangle $CA\Omega_1, \frac{\sin(\pi - \alpha)}{b} = \frac{\sin \omega}{r_A} = \frac{\sin(\alpha - \omega)}{r_C}$;
- dans le triangle $BC\Omega_1, \frac{\sin(\pi - \gamma)}{a} = \frac{\sin \omega}{r_C} = \frac{\sin(\gamma - \omega)}{r_B}$;
- dans le triangle $AB\Omega_1, \frac{\sin(\pi - \beta)}{c} = \frac{\sin \omega}{r_B} = \frac{\sin(\beta - \omega)}{r_A}$.

D'autre part, l'angle ω , qui est l'angle entre $A\Omega_1$ et la tangente en A à la spirale décrite par A, est constant. En dérivant la relation $r_B \sin \beta = c \sin \omega$, on obtient

$$r'_B \sin \beta + r_B \beta' \cos \beta = c' \sin \omega = -(V_A + V_B \cos \beta) \sin \omega = (r'_A + r'_B \cos \beta) \tan \omega,$$

ce qui s'écrit $r'_B (\sin \beta \cos \omega - \cos \beta \sin \omega) - r'_A \sin \omega + r_B \beta' \cos \omega \cos \beta = 0$ et donne finalement $(r_B \sin(\beta - \omega) - r_A \sin \omega)' = r_B \beta' \sin \omega \sin \beta$.

Comme $r_B \sin(\beta - \omega) = r_A \sin \omega, \beta' = 0$, donc β est constant.

On montre de même que α et γ sont constants, donc que tous les triangles $A(t)B(t)C(t)$ sont semblables entre eux. □

Théorème. Soient les propriétés éventuelles suivantes des trajectoires, supposées telles que A, B, C restent non alignés :

- (i) Les triangles $A(t)B(t)C(t)$ restent semblables, au cours du mouvement, au triangle initial.
- (ii) Les vitesses V_A, V_B, V_C sont de la forme $V_A = kb^2 c, V_B = kc^2 a, V_C = ka^2 b$, où k est une fonction de t , strictement positive et de classe \mathbb{C}^1 .
- (iii) Le premier point de Brocard de tous les triangles $A(t)B(t)C(t)$ reste fixe au cours du mouvement, et c'est le point de jonction des trois poursuivants.
- (iv) Les courbes décrites par $A(t), B(t), C(t)$ sont des spirales logarithmiques.

Les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes, et chacune d'entre elles est équivalente à la conjonction de (iii) et (iv).

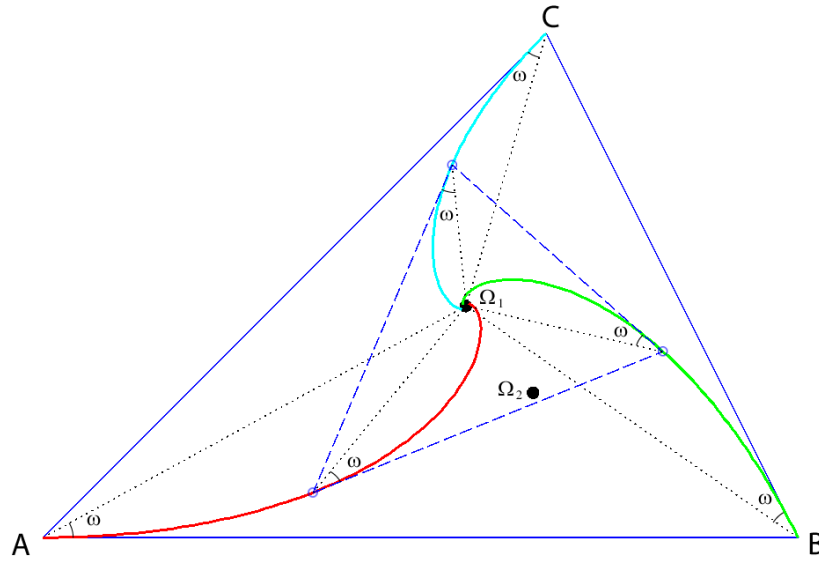


Figure 2. Jonction au premier point de Brocard du triangle initial

IV.4 Points de jonction possibles

Proposition. *On peut faire en sorte, en imposant certaines conditions aux vitesses de $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, que tout point à l'intérieur du triangle initial puisse être le point de rencontre des trois poursuivants.*

Démonstration. Soit H_0 un point à l'intérieur du triangle $A(0)B(0)C(0)$. Il suffit, d'après I.5.a., que H_0 soit à l'intérieur de tous les triangles $A(t)B(t)C(t)$.

Le point H_0 est barycentre de $(A(0), \lambda)$, $(B(0), \mu)$, $(C(0), \nu)$ avec λ, μ, ν strictement positifs. Soit $H(t)$ le barycentre de $(A(t), \lambda)$, $(B(t), \mu)$, $(C(t), \nu)$. Alors $H(t)$ est à l'intérieur de tous les triangles $A(t)B(t)C(t)$. Montrons que l'on peut choisir V_A, V_B, V_C pour que $H(t)$ reste fixe.

$$\text{On a } (\lambda + \mu + \nu) \frac{d\vec{H}}{dt} = \lambda \frac{d\vec{A}}{dt} + \mu \frac{d\vec{B}}{dt} + \nu \frac{d\vec{C}}{dt} \quad (\text{car } \lambda, \mu, \nu \text{ sont constants}).$$

Alors $H(t)$ est fixe si et seulement si $\lambda \frac{V_A}{c} \vec{AB} + \mu \frac{V_B}{a} \vec{BC} + \nu \frac{V_C}{b} \vec{CA} = \vec{0}$, ce qui donne $\lambda \frac{V_A}{c} = \mu \frac{V_B}{a} = \nu \frac{V_C}{b}$, c'est-à-dire $V_A = \frac{ck}{\lambda}$, $V_B = \frac{ak}{\mu}$, $V_C = \frac{bk}{\nu}$, où k est une fonction quelconque de t , de classe \mathcal{C}^1 , strictement positive.

Il n'est pas sûr que les poursuivants se rejoignent, mais si c'est le cas, ils se rejoignent en H_0 . □

Examinons le cas particulier où H_0 est le point G , isobarycentre des sommets du triangle initial.

IV.5 Possibilité de rencontre au point G

On applique la propriété précédente à G . Avec les notations précédentes, $\lambda = \mu = \nu = 1$. On suppose donc $V_A = ck$, $V_B = ak$, $V_C = bk$.

Soit $T > 0$. Supposons que k est la fonction définie par $k(t) = \frac{1}{T-t}$ pour $0 < t < T$. Le point G est le centre de gravité de tous les triangles $A(t)B(t)C(t)$.

a. Rencontre des trois points

Reprenons le calcul de a' , b' , c' . En tenant compte de la relation $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$,

$$c' = -V_A + V_B \cos \beta = -k(c + a \cos \beta) = -k \frac{3c^2 + a^2 - b^2}{2c}.$$

De même $a' = -k \frac{3a^2 + b^2 - c^2}{2a}$ et $b' = -k \frac{3b^2 + c^2 - a^2}{2b}$.

La fonction $m = a^2 + b^2 + c^2$ vérifie donc $m' = -3km$. On trouve alors $m(t) = m(0) \left(\frac{T-t}{T} \right)^3$. Les trois poursuivants se rencontrent en G à l'instant T.

b. Les trois points A, B, C restent-ils distincts jusqu'au bout ?

Nous allons étudier la fonction $\ln(abc)$ définie sur tout intervalle où $a(t)b(t)c(t)$ est non nul.

Cette fonction a pour dérivée

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = -\frac{1}{2}k \left(9 + \frac{b^2 - c^2}{a^2} + \frac{c^2 - a^2}{b^2} + \frac{a^2 - b^2}{c^2} \right).$$

Cherchons le signe de

$$Z = \frac{b^2 - c^2}{a^2} + \frac{c^2 - a^2}{b^2} + \frac{a^2 - b^2}{c^2}.$$

On profite de la symétrie et on ordonne le triplet a, b, c ; par exemple, à l'instant t , $a(t) \leq b(t) \leq c(t)$. Si l'on pose $x = \ln \frac{b(t)^2}{a(t)^2}$, $y = \ln \frac{c(t)^2}{b(t)^2}$, $z = \ln \frac{a(t)^2}{c(t)^2}$, on a

$$Z(t) = 2 \operatorname{sh} x + 2 \operatorname{sh} y + 2 \operatorname{sh} z = 2(\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y - \operatorname{sh}(x+y)) = 2 \operatorname{sh} x(1 - \operatorname{ch} y) + 2 \operatorname{sh} y(1 - \operatorname{ch} x) \leq 0$$

(car x et y sont positifs). Donc $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} + \frac{9}{2}k \geq 0$.

Comme $k(t) = \frac{1}{T-t}$, on en déduit que la fonction $t \mapsto \ln(a(t)b(t)c(t)) - \frac{9}{2} \ln(T-t)$ est croissante, donc que

$$\ln(a(t)b(t)c(t)) \geq \frac{9}{2} \ln(T-t) + \ln(a(0)b(0)c(0)) - \frac{9}{2} \ln T,$$

donc que

$$a(t)b(t)c(t) \geq a(0)b(0)c(0) \left(\frac{T-t}{T} \right)^{9/2}.$$

Finalement, les fonctions a, b, c ne peuvent pas s'annuler sur $[0, T[$: les trois points restent distincts tout au long du mouvement.

Remarque. Les vitesses vérifient $V_A + V_B + V_C = k(a + b + c)$. Or $a + b + c \leq \sqrt{3m}$ d'après l'inégalité de Schwarz. D'où $V_A + V_B + V_C \leq \frac{\sqrt{3m}}{T-t}$, c'est-à-dire

$$V_A + V_B + V_C \leq \frac{\sqrt{m(0)(T-t)}}{T^{3/2}}.$$

Les vitesses de A, B, C sont bornées et tendent vers 0 quand t tend vers T.

Remerciements

Je remercie notre collègue Robert Ferreol pour les images Maple contenues dans cet article, ses indications bibliographiques, et pour avoir orienté ma recherche sur les points de Brocard.

Références

- [1] Lucas, Édouard. Problème des trois chiens. *Nouv. Corresp. Math.* 3, 175-176, 1877.
- [2] Ferreol, Robert. Courbes de poursuites mutuelles. 2022. <https://mathcurve.com/courbes2d/poursuite/poursuitemutuelle.shtml> .
- [3] Weisstein, Eric W. Mice Problem. From *MathWorld* – A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/MiceProblem.html>
- [4] Bernhart, Arthur. (1959). Polygons of pursuit. *Scripta Mathematica*. 24. https://www.researchgate.net/publication/265369315_Polygons_of_pursuit
- [5] Miller, R. K. Problem 16. *Cambridge Math. Tripos Exam*. January 5, 1871.