Probabilités et densités dans $\mathbb{N}^*$

par Antoine Hollard[1]

I Préliminaires

Établissons ou rappelons quelques résultats qui vont nous servir.

I.1 Fonction zêta de Riemann

La fonction ζ définie pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$ par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

Quand s tend vers 1^+, $\zeta(s)$ est équivalent à $\frac{1}{s-1}$.

En effet, pour tout $n > 0$, $\frac{1}{(n+1)^s} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n^s}$.

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s-1}$, $\zeta(s) > \frac{1}{s-1} > \zeta(s) - 1$, et donc $\zeta(s)(s-1)$ tend vers 1 quand s tend vers 1^+.

I.2 Développement en produit eulérien

Soit $\mathbf{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour $s > 1$, on peut écrire

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathrm{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Démonstration. On ordonne les nombres premiers : $p_1 = 2 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$.

Soit

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\prod_{p\in\mathrm{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}.$$

Pour $s > 1$, $-\ln \mathrm{A}$ est la somme de la série convergente $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)$ car $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) \sim \frac{1}{p_n^s}$ quand $n \to +\infty$ et que les sommes partielles $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^s}$ sont majorées par $\zeta(s)$.

1. cosinushollard@yahoo.fr

Soit $a_n(s) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)$. Alors $\frac{1}{a_n(s)} > \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{p_i^s} + \frac{1}{p_i^{2s}} + \cdots + \frac{1}{p_i^{ns}}\right)$.

Soit $\mathrm{V}(s) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{p_i^s} + \frac{1}{p_i^{2s}} + \cdots + \frac{1}{p_i^{ns}}\right)$. Alors $\mathrm{V}(s) > 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s}$ car, si on développe le produit $\mathrm{V}(s)$ en somme, comme tout entier k compris entre 1 et n se décompose en produit de facteurs premiers pris parmi $p_1, p_2, \ldots, p_n$ avec des degrés inférieurs à n, $\frac{1}{n^s}$ figure dans la somme obtenue. À la limite, $\zeta(s) \leqslant \mathrm{A}$.

D'autre part, pour n et m fixés, il existe N tel que

$$\mathrm{W} = \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{p_i^s} + \frac{1}{p_i^{2s}} + \cdots + \frac{1}{p_i^{ms}}\right) \leqslant 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{N}^s},$$

inégalité obtenue en développant W. Donc $\mathrm{W} \leqslant \zeta(s)$. Si on fait tendre m vers$+\infty$ pour n fixé, puis n vers $+\infty$, on obtient $\mathrm{A} \leqslant \zeta(s)$.

Finalement, $\mathrm{A} = \zeta(s)$. □

I.3 Étude en $s = 1$

Montrons que $a_n = a_n(1) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers$+\infty$.

On reprend la même idée que dans la section précédente :

$$\frac{1}{a_n} > \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \cdots + \frac{1}{p_i^n}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Donc $\frac{1}{a_n}$ tend vers $+\infty$ et a_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Conséquence. Pour k fixé, $\prod_{i=k}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers$+\infty$.

I.4 Procédé de sommation d'Abel

Soit (a_n) une suite réelle et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$.
Pour $x > 0$, on pose $\mathrm{S}(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n$ (S est donc en escalier).

Alors, pour tout $x > 0$, $\sum_{n \leqslant x} a_n f(n) = \mathrm{S}(x) f(x) - \int_1^x \mathrm{S}(u) f'(u)\,\mathrm{d}u$.

Démonstration.
$\sum_{n \leqslant x} a_n \big(f(x) - f(n)\big) = \sum_{n \leqslant x} a_n \int_n^x f'(u)\,\mathrm{d}u = \int_1^x \sum_{n \leqslant u} a_n f'(u)\,\mathrm{d}u = \int_1^x \mathrm{S}(u) f'(u)\,\mathrm{d}u.$
D'où le résultat. □

Si, de plus, $\mathrm{S}(x) f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et si la série $\sum a_n f(n)$ ou l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{S}(u) f'(u)\,\mathrm{d}u$ converge, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n f(n) = -\int_1^{+\infty} \mathrm{S}(u) f'(u)\,\mathrm{d}u$.

II Probabilités sur $\mathbb{N}^*$

Toute probabilité $\mathbb{P}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ est entièrement déterminée par les probabilités des évènements élémentaires. Ainsi, si on pose, pour un entier n, $\mathbb{P}(\{n\}) = u_n$, pour toute partie A de $\mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \sum_{n\in\mathrm{A}} u_n$ par σ-additivité.

On voudrait pouvoir dire que, si on prend un entier au hasard, il y a une chance sur deux pour qu'il soit pair, une chance sur 3 pour qu'il soit multiple de 3, etc. On aimerait donc pouvoir trouver une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(k\mathbb{N}^*) = \frac{1}{k}$. Nous allons montrer que c'est impossible.

Démonstration. (D'après [1]) Supposons qu'une telle probabilité $\mathbb{P}$ existe.

► Soient $q_1, \ldots, q_n$ des nombres premiers distincts. Les évènements $q_i\mathbb{N}^*$ vérifient

$$\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} q_i\mathbb{N}^* = \left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n} q_i\right)\mathbb{N}^*,$$

donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} q_i\mathbb{N}^*\right) = \dfrac{1}{\prod_{1\leqslant i\leqslant n} q_i} = \prod_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbb{P}(q_i\mathbb{N}^*)$.

Ceci montre que, pour toute famille finie F de nombres premiers, les évènements $p\mathbb{N}^*$, avec $p \in \mathrm{F}$, sont indépendants. Donc leurs complémentaires le sont aussi.

► Il en résulte que, pour n nombres premiers distincts $q_1, \ldots, q_n$, on peut écrire

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} (q_i\mathbb{N}^*)^{\mathrm{c}}\right) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbb{P}\left((q_i\mathbb{N}^*)^{\mathrm{c}}\right) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n}\left(1 - \frac{1}{q_i}\right).$$

Et si on repasse aux complémentaires,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} q_i\mathbb{N}^*\right) = 1 - \prod_{1\leqslant i\leqslant n}\left(1 - \frac{1}{q_i}\right).$$

► Soit $\mathrm{E} = \bigcap_{k\geqslant 1}\left(\bigcup_{i\geqslant k} p_i\mathbb{N}^*\right)$, où (p_i) est la suite croissante des nombres premiers.

Pour k fixé, les évènements $\mathrm{E}_{k,n} = \bigcup_{k\leqslant i\leqslant n} p_i\mathbb{N}^*$ forment une suite croissante avec n.

Or, quand $n \to +\infty$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\leqslant i\leqslant n} p_i\mathbb{N}^*\right) = 1 - \prod_{k\leqslant i\leqslant n}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ tend vers 1 d'après la section I.3. Donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geqslant k} p_i\mathbb{N}^*\right) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Comme E apparaît comme l'intersection décroissante des évènements $\bigcup_{i\geqslant k} p_i\mathbb{N}^*$ pour k parcourant $\mathbb{N}^*$, qui sont tous de probabilité 1, $\mathbb{P}(\mathrm{E}) = 1$.

► Quels entiers appartiennent à E ? Soit x un entier au moins égal à 1. À partir d'un certain rang k, x n'est divisible par aucun p_i, avec $i \geqslant k$. Donc x ne peut appartenir à $\bigcup_{i\geqslant k} p_i\mathbb{N}^*$. Donc x ne peut appartenir à E. Donc E est vide, et $\mathbb{P}(\mathrm{E}) = 0$. Contradiction. □

On cherche malgré tout à construire des applications d'une partie de $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ dans $[0,1]$ qui sont « presque » des probabilités et correspondent à notre intuition arithmétique. On va définir ainsi des densités sur $\mathbb{N}^*$ vérifiant la propriété d'additivité sur un nombre fini d'évènements, mais pas la σ-additivité. Voir [2].

III Densité naturelle

III.1 Définition

Pour une partie A de $\mathbb{N}^*$ et un entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $\mathrm{A}(n) = \{x \in \mathrm{A}, x \leqslant n\}$.
On pose $\mathrm{D}_1(\mathrm{A}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{card}(\mathrm{A}(n))}{n}$ si cette limite existe.
On note $\mathrm{E}(\mathrm{D}_1)$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ des parties pour lesquelles cette limite existe.

III.2 Premières propriétés

L'application D_1 vérifie les propriétés suivantes, venant du fait que $\mathrm{A}(n) = \mathrm{A} \cap \mathrm{K}_n$, où $\mathrm{K}_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

(a) $\mathrm{D}_1(\mathbb{N}^*) = 1$.

(b) Si A appartient à $\mathrm{E}(\mathrm{D}_1)$, alors $\mathbb{N}^* \smallsetminus \mathrm{A}$ appartient à $\mathrm{E}(\mathrm{D}_1)$ et $\mathrm{D}_1(\mathbb{N}^* \smallsetminus \mathrm{A}) = 1 - \mathrm{D}_1(\mathrm{A})$.

(c) Si A et B appartiennent à $\mathrm{E}(\mathrm{D}_1)$ et sont disjoints, $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ appartient à $\mathrm{E}(\mathrm{D}_1)$ et, de l'égalité $(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})(n) = \mathrm{A}(n) \cup \mathrm{B}(n)$, on déduit $\mathrm{D}_1(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \mathrm{D}_1(\mathrm{A}) + \mathrm{D}_1(\mathrm{B})$.
Plus généralement, si les parties A, B, $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ et $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ appartiennent à $\mathrm{E}(\mathrm{D}_1)$, alors, puisque $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})(n) = \mathrm{A}(n)\cap\mathrm{B}(n)$, $\mathrm{D}_1(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \mathrm{D}_1(\mathrm{A}) + \mathrm{D}_1(\mathrm{B}) - \mathrm{D}_1(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.

III.3 Pas une probabilité, mais…

L'application D_1 vérifie donc presque toutes les propriétés d'une mesure de probabilité… à l'exception de la σ-additivité. En effet, pour toute partie A finie, $\mathrm{D}_1(\mathrm{A}) = 0$.
On dit que D_1 est une densité sur $\mathbb{N}^*$, la densité naturelle ou densité asymptotique.
Elle vérifie deux autres propriétés.

(d) (Invariance par translation) Si A appartient à $\mathrm{E}(\mathrm{D}_1)$, $1+\mathrm{A}$ aussi et $\mathrm{D}_1(1+\mathrm{A}) = \mathrm{D}_1(\mathrm{A})$.

(e) (Propriété d'homothétie) Si A appartient à $\mathrm{E}(\mathrm{D}_1)$, $k\mathrm{A}$ appartient aussi à $\mathrm{E}(\mathrm{D}_1)$ pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathrm{D}_1(k\mathrm{A}) = \frac{1}{k}\mathrm{D}_1(\mathrm{A})$.

Démonstration. ▶ *Propriété (d)* Soit $\mathrm{A}' = 1 + \mathrm{A}$.
Pour n fixé, $\frac{1}{n}\operatorname{card}(\mathrm{A}'(n)) = \frac{1}{n}\operatorname{card}(\mathrm{A}(n))$ ou $\frac{1}{n}(\operatorname{card}(\mathrm{A}(n)) - 1)$, donc si $\mathrm{D}_1(\mathrm{A})$ existe, $\mathrm{D}_1(1+\mathrm{A})$ existe aussi et lui est égal.

▶ *Propriété (e)* Soit $\mathrm{A}' = k\mathrm{A}$.
Alors $x \in \mathrm{A}'(n) \iff x = ky$, avec $y \in \mathrm{A}$ et $y \leqslant \frac{n}{k}$.
Donc $\operatorname{card}\mathrm{A}'(n) = \operatorname{card}\mathrm{A}(q)$ avec $q = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ Donc $\frac{\operatorname{card}\mathrm{A}'(n)}{n}$ a même limite que $\frac{\operatorname{card}\mathrm{A}(q)}{n}$, donc que $\frac{\operatorname{card}\mathrm{A}(q)}{qk}$ quand q tend vers $+\infty$. Donc, si $\mathrm{D}_1(\mathrm{A})$ existe, $\mathrm{D}_1(k\mathrm{A})$ aussi et $\mathrm{D}_1(k\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{D}_1(\mathrm{A})}{k}$. □

III.4 Exemple d'une partie sans densité naturelle

Soit A_0 la réunion des intervalles d'entiers $[\![2^{2n}, 2^{2n+1}[\![$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Soit $\mathrm{N} = 2^{2n+1}$. Alors $\operatorname{card}\mathrm{A}_0(\mathrm{N}) = 1 + 4 + \dots + 2^{2n} = \frac{4^{n+1}-1}{3}$ et $\frac{\operatorname{card}\mathrm{A}_0(\mathrm{N})}{\mathrm{N}}$ tend vers $\frac{2}{3}$ quand n tend vers $+\infty$.
Et si on prend $\mathrm{N}' = 2^{2n+2} - 1$, alors $\mathrm{A}_0(\mathrm{N}') = \mathrm{A}_0(\mathrm{N})$, donc $\frac{\operatorname{card}\mathrm{A}_0(\mathrm{N}')}{\mathrm{N}'} = \frac{\operatorname{card}\mathrm{A}_0(\mathrm{N})}{\mathrm{N}'}$ tend vers $\frac{1}{3}$ quand n tend vers $+\infty$.
Donc A_0 n'appartient pas à $\mathrm{E}(\mathrm{D}_1)$.

IV La densité zêta

IV.1 Définition

Pour une partie A de $\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{D}_2(\mathrm{A}) = \lim\limits_{s\to 1^+} \frac{1}{\zeta(s)} \sum\limits_{n\in\mathrm{A}} \dfrac{1}{n^s}$ quand cette limite existe.

On note $\mathrm{E}(\mathrm{D}_2)$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ des parties pour lesquelles cette limite existe.

IV.2 Propriétés élémentaires

Les propriétés du III.2 sont évidemment vérifiées, celles du III.3 également.

Démonstration. ► *Propriété (d) : invariance par translation*

Posons, pour $s>1$, $f_{\mathrm{A}}(s) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum\limits_{n\in\mathrm{A}} \dfrac{1}{n^s}$; alors $f_{1+\mathrm{A}}(s) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum\limits_{n\in\mathrm{A}} \dfrac{1}{(n+1)^s}$.

Alors $0 \leqslant \sum\limits_{n\in\mathrm{A}} \left(\dfrac{1}{n^s} - \dfrac{1}{(n+1)^s}\right) \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\dfrac{1}{n^s} - \dfrac{1}{(n+1)^s}\right) = 1$. Comme $\frac{1}{\zeta(s)}$ tend vers 0 quand s tend vers 1^+, $f_{\mathrm{A}}(s) - f_{1+\mathrm{A}}(s)$ tend vers 0 quand s tend vers 1^+. Donc, si $\mathrm{D}_2(\mathrm{A})$ existe, alors $\mathrm{D}_2(1+\mathrm{A})$ existe aussi, et $\mathrm{D}_2(\mathrm{A}) = \mathrm{D}_2(1+\mathrm{A})$.

► *Propriété (e) : propriété d'homothétie*

Pour $s>1$, $\sum\limits_{n\in k\mathrm{A}} \dfrac{1}{n^s} = \dfrac{1}{k^s} \sum\limits_{n\in\mathrm{A}} \dfrac{1}{n^s}$, donc, si $\mathrm{D}_2(\mathrm{A})$ existe, $\mathrm{D}_2(k\mathrm{A})$ aussi et $\mathrm{D}_2(k\mathrm{A}) = \frac{1}{k}\mathrm{D}_2(\mathrm{A})$. □

IV.3 Lien avec la densité naturelle

Montrons que $\mathrm{E}(\mathrm{D}_1) \subset \mathrm{E}(\mathrm{D2})$ et que, pour $\mathrm{F} \in \mathrm{E}(\mathrm{D}_1)$, $\mathrm{D}_2(\mathrm{F}) = \mathrm{D}_1(\mathrm{F})$.

Démonstration. Soit F une partie de $\mathbb{N}^*$ admettant une densité naturelle. Soit (e_n) la suite caractéristique associée à F : $e_n = 1$ si $n \in \mathrm{F}$ et $e_n = 0$ si $n \notin \mathrm{F}$.

On suppose que $\dfrac{1}{x} \sum\limits_{n\leqslant x} e_n = \dfrac{\mathrm{S}(x)}{x}$ a une limite λ quand N tend vers $+\infty$.

Soit, pour $s>1$, $g(s) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{e_n}{n^s}$. Montrons que $(s-1)g(s)$ tend vers λ quand s tend vers 1^+.

On applique la formule de sommation d'Abel démontrée à la section I.4 avec $a_n = e_n$ et $f(u) = \frac{1}{u^s}$. Comme par hypothèse $\dfrac{\mathrm{S}(x)}{x}$ tend vers λ quand x tend vers $+\infty$, $\mathrm{S}(x)f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, donc $g(s) = s\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{S}(u)}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u$ car l'intégrale converge.

Soit $\varepsilon>0$. Il existe c tel que $\forall u \geqslant c, (\lambda-\varepsilon)u \leqslant \mathrm{S}(u) \leqslant (\lambda+\varepsilon)u$.

Pour s compris entre 1 et 2, $\displaystyle\int_1^c \frac{\mathrm{S}(u)}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u \leqslant \mathrm{M} = \int_1^c \mathrm{S}(u)\,\mathrm{d}u$.

D'autre part, $(\lambda-\varepsilon)\mathrm{J}(s) \leqslant \displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{\mathrm{S}(u)}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u \leqslant (\lambda+\varepsilon)\mathrm{J}(s)$, où $\mathrm{J}(s) = \displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{u^s}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{(s-1)c^{s-1}}$ qui est équivalent à $\dfrac{1}{s-1}$ quand s tend vers 1^+. Donc, sur $]1,2]$,

$$(s-1)s(\lambda-\varepsilon)\mathrm{J}(s) \leqslant (s-1)g(s) \leqslant (s-1)s(\mathrm{M}+(\lambda+\varepsilon)\mathrm{J}(s)).$$

Comme $(s-1)s\mathrm{J}(s)$ tend vers 1 quand s tend vers 1^+, il existe $\alpha>0$ tel que

$$\forall s \in]1, 1+\alpha[, \lambda-2\varepsilon \leqslant (s-1)g(s) \leqslant \lambda+2\varepsilon,$$

et le résultat est montré.

Donc $\mathrm{F} \in \mathrm{E}(\mathrm{D}_2)$, et $\mathrm{D}_2(\mathrm{F}) = \mathrm{D}_1(\mathrm{F})$. □

IV.4 Une partie sans densité naturelle mais avec une densité zêta

Montrons que la partie A_0 définie dans dans la section III.4 appartient à $E(D_2)$.

Par comparaison avec les intégrales de $x \mapsto \dfrac{1}{x^s}$ sur chaque segment $[n, n+1]$, si $a < b$, alors $a^{1-s} - b^{1-s} \leqslant (s-1)\displaystyle\sum_{n=a}^{b-1} \frac{1}{n^s} \leqslant (a-1)^{1-s} - (b-1)^{1-s}$.

Posons $h = s-1$; $(s-1)\displaystyle\sum_{n\in A_0} \frac{1}{n^s}$ est donc encadrée par les deux expressions suivantes : $f(h) = h + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4^{nh}} - \frac{1}{2^{(2n+1)h}}\right)$ et $g(h) = h + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(4^n-1)^h} - \frac{1}{(2^{2n+1}-1)^h}\right)$.

Réduisons $f(h)$: $f(h) = h + \left(1 - \dfrac{1}{2^h}\right)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4^{nh}} = h + \frac{1}{4^h\left(1+\frac{1}{2^h}\right)}$, donc $f(h)$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand h tend vers 0^+.

Montrons d'autre part que $f(h) - g(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0^+.

La démonstration repose sur le lemme suivant.

Lemme. *Soit (a_n) une suite d'entiers strictement supérieurs à 1 telle que la série $\sum \dfrac{1}{a_n - 1}$ converge. Alors $u(h) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(a_n-1)^h} - \frac{1}{a_n^h}\right)$ tend vers 0 quand h tend vers 0^+.*

Démonstration.

$$\frac{1}{(a_n-1)^h} - \frac{1}{a_n^h} = h\int_{a_n-1}^{a_n}\frac{dx}{x^{1+h}} \leqslant \frac{h}{(a_n-1)^{h+1}}$$

donc

$$u(h) \leqslant h\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(a_n-1)^{h+1}}.$$

Comme $\sum \dfrac{1}{a_n-1}$ converge, $u(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0^+. □

Comme $g(h) - f(h)$ est la différence de deux expressions de ce type, $g(h) - f(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0^+.

Donc $(s-1)\displaystyle\sum_{n\in A_0}\frac{1}{n^s}$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand s tend vers 1^+, donc $A_0 \in E(D_2)$ et $D_2(A_0) = \frac{1}{2}$.

V La densité logarithmique

V.1 Définition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. On rappelle que $H_n \sim \ln n$ en $+\infty$.

Pour une partie A de $\mathbb{N}^*$, soit $S_n(A) = \displaystyle\sum_{k\in A(n)}\frac{1}{k}$.

On pose $D_3(A) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n(A)}{H_n}$ quand cette limite existe.

On note alors $E(D_3)$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ des parties pour lesquelles $D_3(A)$ existe.

V.2 Propriétés élémentaires

Il est clair que D_3 vérifie encore les propriétés du III.2. Elle vérifie aussi celles du III.3.

Démonstration. ► *Propriété (d) : invariance par translation* Soit A tel que $D_3(A)$ existe.

Soit $A' = 1 + A$. Pour n fixé, $\displaystyle\sum_{k\in A'(n)} \frac{1}{k} = \sum_{j\in A(n)} \frac{1}{j+1}$ ou $\displaystyle\sum_{j\in A(n)} \frac{1}{j+1} - \frac{1}{n+1}$ (si $n \in A(n)$).

Comme $\displaystyle\sum_{j\in A(n)} \frac{1}{j} - \sum_{j\in A(n)} \frac{1}{j+1} = \sum_{j\in A(n)} \frac{1}{j(j+1)} \leqslant \sum_{j\leqslant n} \frac{1}{j(j+1)} \leqslant 1$, $\dfrac{S_n(A)}{H_n} - \dfrac{S_n(A')}{H_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc, si $D_3(A)$ existe, $D_3(A')$ existe et $D_3\left(A'\right) = D_3(A)$.

► *Propriété (e) : propriété d'homothétie* Soit k entier naturel non nul.

Soit $\displaystyle S_n(kA) = \sum_{kj\in A(n)} \frac{1}{kj} = \frac{1}{k} \sum_{j\in A(\lfloor \frac{n}{k}\rfloor)} \frac{1}{j} = \frac{1}{k} S_{\lfloor \frac{n}{k}\rfloor}(A)$.

Si $D_3(A)$ existe, $\dfrac{S_{\lfloor \frac{n}{k}\rfloor}(A)}{H_{\lfloor \frac{n}{k}\rfloor}}$ tend vers $D_3(A)$ quand n tend vers $+\infty$.

Or $H_{\lfloor \frac{n}{k}\rfloor}$ est équivalent à $\ln\left(\lfloor \frac{n}{k}\rfloor\right)$, donc à $\ln\left(\dfrac{n}{k}\right)$, donc à $\ln n$, donc à H_n. Donc $\dfrac{S_n(kA)}{H_n}$ tend vers $\dfrac{D_3(A)}{k}$ quand n tend vers $+\infty$ et $D_3(kA) = \dfrac{D_3(A)}{k}$. □

V.3 Comparaison des densités zêta et logarithmique

On peut démontrer que la densité zêta et la densité logarithmique coïncident.

Théorème.

$$E(D_2) = E(D_3) \quad \textit{et} \quad \forall F \in E(D_2), \quad D_2(F) = D_3(F).$$

Démonstration. ► Soit F une partie de $\mathbb{N}^*$ admettant une densité logarithmique.

Soit (e_n) la suite caractéristique associée à F : $e_n = 1$ si $n \in F$ et $e_n = 0$ si $n \notin F$.

On suppose donc que $\dfrac{\sum_{n\leqslant x} \frac{e_n}{n}}{\ln x} = \dfrac{S(x)}{\ln x}$ a une limite λ quand x tend vers $+\infty$.

Soit $\displaystyle g(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e_n}{n^s}$ pour $s > 1$. Montrons que $(s-1)g(s)$ tend vers λ quand s tend vers 1^+.

On applique la formule de sommation d'Abel démontrée en section I.4 avec $a_n = \frac{e_n}{n}$ et $f(u) = \frac{1}{u^{s-1}}$. Comme par hypothèse $\dfrac{S(x)}{\ln x}$ tend vers λ quand x tend $+\infty$, $S(x)f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Donc

$$g(s) = (s-1)\int_1^{+\infty} \frac{S(u)}{u^s}\,du$$

(car l'intégrale converge).

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe c tel que $\forall u \geqslant c, \quad (\lambda-\varepsilon)\ln u \leqslant S(u) \leqslant (\lambda+\varepsilon)\ln u$. Pour s compris entre 1 et 2 ,

$$\int_1^c (s-1)\frac{S(u)}{u^s}\,du \leqslant M = \int_1^c S(u)\,du \quad \text{et} \quad (\lambda-\varepsilon)J(s) \leqslant \int_c^{+\infty} (s-1)\frac{S(u)}{u^s}\,du \leqslant (\lambda+\varepsilon)J(s),$$

où $J(s) = (s-1)\int_c^{+\infty} \frac{\ln u}{u^s}\,du = \frac{\ln c}{c^{s-1}} + \frac{1}{(s-1)c^{s-1}}$ par intégration par parties. Donc, sur $]1,2]$,

$$(s-1)(\lambda-\varepsilon)J(s) \leqslant (s-1)g(s) \leqslant (s-1)(M+(\lambda+\varepsilon)J(s)).$$

Comme $(s-1)J(s)$ tend vers 1 quand s tend vers 1^+, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall s \in]1, 1+\alpha[, \quad \lambda - 2\varepsilon \leqslant (s-1)g(s) \leqslant \lambda + 2\varepsilon,$$

et le résultat est montré.

▸ Réciproquement, si $D_2(F)$ existe, alors $D_3(F)$ existe et $D_2(F) = D_3(F)$. Ce résultat, que nous admettons, se démontre grâce aux propriétés de la transformation de Laplace. Voir [3], p. 38-39. □

VI Quelques résultats

Les densités D_i sur $\mathbb{N}^*$ données en exemple vérifient les propriétés a, b, c, d, e de la section III.

On remarque que toute partie finie de $\mathbb{N}^*$ a une densité nulle.

On peut reprendre la définition d'évènements indépendants : deux parties A et B de $\mathbb{N}^*$ sont dites indépendantes si $D_i(A \cap B) = D_i(A)D_i(B)$. Ici, en particulier, si p et q sont premiers entre eux, $p\mathbb{N}^*$ et $q\mathbb{N}^*$ sont indépendants, de même que leurs complémentaires. On étend de même la définition de l'indépendance d'un nombre fini d'évènements et le lien avec l'indépendance des complémentaires.

VI.1 Densité de l'ensemble des multiples d'un entier

L'ensemble des multiples d'un entier $k \geqslant 1$ donné a pour densité $\frac{1}{k}$.

Plus généralement, l'ensemble des nombres congrus à un entier donné j modulo k a pour densité $\frac{1}{k}$, à cause de l'invariance par translation.

VI.2 Densité d'un ensemble périodique

Si T est un entier strictement positif, une partie A de $\mathbb{N}^*$ est dite T-périodique si, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $\quad x \in A \Longleftrightarrow x + T \in A$.

Soit A une partie T-périodique et $m = \operatorname{card}(A \cap \{1, \dots, T\})$. Alors A a pour densité $\frac{m}{T}$.

En effet, A est la réunion finie disjointe d'ensembles de la forme $E_r = \{r + nT,\ n \in \mathbb{N}^*\}$, où r parcourt $A \cap \{1, \dots, T\}$.

VI.3 Densité de l'ensemble des entiers premiers avec un entier donné

L'ensemble des entiers naturels qui sont premiers avec un entier naturel n donné est n-périodique, donc a pour densité $\frac{\varphi(n)}{n}$, où φ est l'indicateur d'Euler.

VI.4 Densité de l'ensemble des carrés parfaits

Soit C l'ensemble des entiers carrés d'un autre entier. Alors C est de densité nulle.

En effet, $\operatorname{card} C(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Donc $\frac{\operatorname{card} C(n)}{n}$ est équivalent quand n tend vers $+\infty$ à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui tend vers 0 en $+\infty$.

VI.5 Densité de l'ensemble des différences de deux carrés

Soit $A = \{z \in \mathbb{N}^* \mid \exists (x, y) \in \mathbb{N}^2,\ z = x^2 - y^2\}$. L'ensemble A contient tous les nombres impairs, puisque $2k+1 = (k+1)^2 - k^2$, et tous les multiples de 4,puisque $4k = (k+1)^2 - (k-1)^2$.

D'autre part, pour tout entier x, $x^2 \equiv 0$ ou $1 \bmod 4$. Donc A ne peut contenir aucun élément $z \equiv 2 \bmod 4$.

Donc l'ensemble des différences de deux carrés a pour densité naturelle $\frac{3}{4}$.

VI.6 Densité de l'ensemble des nombres premiers

En utilisant le grand théorème des nombres premiers, on peut montrer que $D_1(\mathbf{P}) = 0$. En effet, $\pi(n) = \mathrm{card}(\mathbf{P}(n))$ est équivalent à $\frac{n}{\ln n}$ en $+\infty$, donc $\frac{\pi(n)}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

On peut aussi donner une démonstration élémentaire de ce résultat.

Démonstration. On ordonne $\mathbf{P}$: $p_1 = 2 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$. Les ensembles $p_i\mathbb{N}^*$ sont indépendants, de même que leurs complémentaires.

Pour k, soit $A_k = \bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant k} \left(p_i\mathbb{N}^*\right)^{\mathrm{c}}$, partie qui contient tous les nombres premiers p_j, avec $j > k$. Alors $\mathbf{P} \subset A_k \cup \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$.

Pour n quelconque, $\frac{\pi(n)}{n} \leqslant \frac{k+\mathrm{card}\,A_k(n)}{n}$. Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{k+\mathrm{card}\,A_k(n)}{n}$ tend vers $D_1(A_k)$

Or on peut utiliser les mêmes idées que dans la section II sur un nombre fini d'évènements indépendants :

$$D_1(A_k) = D_1\left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant k} \left(p_i\mathbb{N}^*\right)^{\mathrm{c}}\right) = \prod_{1\leqslant i\leqslant k} D_1\left(\left(p_i\mathbb{N}^*\right)^{\mathrm{c}}\right) = \prod_{1\leqslant i\leqslant k}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Donc $D_1(A_k)$ tend vers 0 quand k tend $+\infty$ d'après la section I.3.

Soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver k tel que $D_1(A_k) \leqslant \varepsilon$. Pour cette valeur de k, il existe donc n_0 tel que $\forall n > n_0$, $\frac{\pi(n)}{n} \leqslant 2\varepsilon$.

Donc $D_1(\mathbf{P}) = 0$. □

VI.7 Applications de la densité zêta

L'utilisation de la densité zêta permet parfois d'obtenir facilement des résultats intéressants. En voici deux exemples.

a. Densité de l'ensemble des entiers sans carré parfait dans leur décomposition

Soit A l'ensemble des entiers non divisibles par un carré de nombre premier.

On rappelle la définition de la fonction de Möbius μ définie sur $\mathbb{N}^*$. Si n est un produit de r facteurs premiers distincts, $\mu(n) = (-1)^r$; sinon, $\mu(n) = 0$.

Donc A est l'ensemble des entiers n tels que $\left|\mu(n)\right| = 1$.

Or, pour $s > 1$, d'après I.2, $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \prod\limits_{p\in\mathbf{P}}\left(1 + \frac{1}{p^s}\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\left|\mu(n)\right|}{n^s} = \sum\limits_{n\in A} \frac{1}{n^s}$.

Donc $D_2(A) = \dfrac{1}{\zeta(2)} = \dfrac{6}{\pi^2}$.

On peut aussi prouver que A a pour densité naturelle $\frac{6}{\pi^2}$, mais la démonstration est plus compliquée.

Remarque. Pour un entier N quelconque, le nombre d'éléments de A compris entre N et N + 1 000 divisé par 1 000 donne une très bonne approximation de $\frac{6}{\pi^2}$.

b. Densité de l'ensemble des sommes de deux carrés

Soit $\mathrm{K} = \left\{z \in \mathbb{N}^* \mid \exists (x, y) \in \mathbb{N}^2, z = x^2 + y^2\right\}$. Nous allons chercher la densité zêta de K.

On cherche la limite quand s tend vers 1^+ de $f_{\mathrm{K}}(s) = \dfrac{1}{\zeta(s)} \displaystyle\sum_{n\in\mathrm{K}} \frac{1}{n^s}$.

Or on sait qu'un entier z est somme de deux carrés d'entiers si et seulement si, dans la décomposition de z en facteurs premiers, les nombres premiers $p \equiv 3 \bmod 4$ figurent avec une puissance paire.

Soient $\mathbf{P}$ l'ensemble des nombres premiers, $\mathbf{P}'$ l'ensemble des nombres premiers $p \equiv 3 \bmod 4$ et $\mathbf{P}''$ son complémentaire dans $\mathbf{P}$.

On peut écrire $\dfrac{1}{\zeta(s)} = \displaystyle\prod_{p\in\mathbf{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ pour $s > 1$.

Et par un calcul analogue à celui de la section I.2, à cause de la propriété des sommes de deux carrés,

$$\sum_{n\in\mathrm{K}} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\prod\limits_{p\in\mathbf{P}''} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \prod\limits_{q\in\mathbf{P}'} \left(1 - \frac{1}{q^{2s}}\right)}.$$

D'où $f_{\mathrm{K}}(s) = \dfrac{1}{\prod\limits_{q\in\mathbf{P}'} \left(1 + \frac{1}{q^s}\right)}$.

Soit $u(s) = -\ln f_{\mathrm{K}}(s)$. Alors

$$u(s) = \sum_{q\in\mathbf{P}'} \ln\left(1 + \frac{1}{q^s}\right) > \sum_{q\in\mathbf{P}'} \left(\frac{1}{q^s} - \frac{1}{2q^{2s}}\right) > \sum_{q\in\mathbf{P}'} \frac{1}{q^s} - \frac{\zeta(2s)}{2}.$$

Le théorème de Dirichlet permet d'affirmer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $ak + b$, et donc ici que $\mathbf{P}'$ est infini. Mais on peut être plus précis : la série $\displaystyle\sum_{q\in\mathbf{P}'} \frac{1}{q}$ est divergente. Voir [4] p. 242.

Montrons alors que, quand s tend vers 1_+, $v(s) = \displaystyle\sum_{q\in\mathbf{P}'} \frac{1}{q^s}$ tend vers $+\infty$.

Pour $\mathrm{A} > 0$ quelconque, on peut trouver n tel que $\displaystyle\sum_{q\in\mathbf{P}', q<n} \frac{1}{q} > 2\mathrm{A}$. Il existe alors $\alpha > 0$ tel que, sur l'intervalle $]1, 1+\alpha[$, $\displaystyle\sum_{q\in\mathbf{P}', q<n} \frac{1}{q^s} > \mathrm{A}$, donc aussi $v(s) > \mathrm{A}$.

Comme $\zeta(2s)$ tend vers $\frac{\pi^2}{6}$ quand s tend vers 1, $u(s)$ tend aussi vers $+\infty$, et $f_{\mathrm{K}}(s)$ tend vers 0.

Finalement, l'ensemble des sommes de deux carrés a donc une densité zêta nulle.

Remarquons au passage que certaines intuitions peuvent être trompeuses. La somme (au sens de l'addition des entiers) d'ensembles de densité nulle n'est pas nécessairement de densité nulle.

On sait en effet que tout entier peut s'écrire comme somme d'au plus quatre carrés d'entiers alors que l'ensemble des sommes de deux carrés est de densité nulle.

VI.8 Une propriété classique de la fonction zêta

Pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$ et $\mathfrak{Re}(t) > 1$, en regroupant les couples (n, m) de même pgcd d,

$$\zeta(s)\zeta(t) = \sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{n^s m^t} = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^{s+t}} \sum_{u\wedge v=1} \frac{1}{u^s v^t},$$

ce qui s'écrit $\zeta(s) = \dfrac{\zeta(s+t)}{\zeta(t)} \displaystyle\sum_{u\wedge v=1} \frac{1}{u^s v^t}$.

En fixant s et en faisant tendre t vers 1^+, on obtient $\zeta(s) = \zeta(s+1) \displaystyle\sum_{u\in\mathbb{N}^*} \frac{D_2(Q(u))}{u^s}$, où $Q(u)$ est l'ensemble des nombres premiers avec u. Or $D_2(Q(u)) = D_1(Q(u)) = \frac{\varphi(u)}{u}$, où φ est l'indicateur d'Euler. Donc

$$\zeta(s) = \zeta(s+1) \sum_{u\in\mathbb{N}^*} \frac{\varphi(u)}{u^{s+1}}.$$

VII Densités sur $(\mathbb{N}^*)^2$

VII.1 Définition

On peut définir des densités sur $(\mathbb{N}^*)^2$ à partir des exemples de densités sur $\mathbb{N}^*$.

On peut ainsi définir à partir de D_1 une densité naturelle Δ_1 pour une partie A de $(\mathbb{N}^*)^2$:

$$\Delta_1(A) = \lim_{N,N'\to+\infty} \frac{1}{NN'} \operatorname{card}\{(x, y) \in A \mid x \leqslant N, y \leqslant N'\}$$

si cette limite existe. On peut de même définir une densité zêta Δ_2 en posant

$$\Delta_2(A) = \lim_{(s,t)\to(1,1)} \frac{1}{\zeta(s)\zeta(t)} \sum_{(n,m)\in A} \frac{1}{n^s m^t}$$

si la limite existe.

VII.2 Propriétés de Δ_1 et Δ_2

► Il est clair que Δ_1 et Δ_2 vérifient pour $\mathbb{N}^{*2}$ les propriétés a, b, c énoncées en III.2 pour la densité naturelle dans $\mathbb{N}^*$.

► *Invariance par translation pour* Δ_1

Soit A une partie de $(\mathbb{N}^*)^2$ et $\mathrm{A}(\mathrm{N},\mathrm{N}') = \{(x,y) \in \mathrm{A} \mid x \leqslant \mathrm{N} \text{ et } y \leqslant \mathrm{N}'\}$. Soit $\mathrm{A}' = (1,0)+\mathrm{A}$.
Si $\mathrm{A}(\mathrm{N},\mathrm{N}')$ ne contient aucun couple (N,k), alors $\operatorname{card}\mathrm{A}'(\mathrm{N},\mathrm{N}') = \operatorname{card}\mathrm{A}(\mathrm{N},\mathrm{N}')$.
Si $\mathrm{A}(\mathrm{N},\mathrm{N}')$ contient des couples (N,k), il en contient au plus N'.

Donc, dans tous les cas, $\operatorname{card}\mathrm{A}(\mathrm{N},\mathrm{N}') - \mathrm{N}' \leqslant \operatorname{card}\mathrm{A}'(\mathrm{N},\mathrm{N}') \leqslant \operatorname{card}\mathrm{A}(\mathrm{N},\mathrm{N}')$, et donc $\left|\frac{\operatorname{card}\mathrm{A}(\mathrm{N},\mathrm{N}')}{\mathrm{NN}'} - \frac{\operatorname{card}\mathrm{A}'(\mathrm{N},\mathrm{N}')}{\mathrm{NN}'}\right| \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

Si $\Delta_1(\mathrm{A})$ existe, alors $\Delta_1(\mathrm{A}')$ existe aussi et $\Delta_1(\mathrm{A}) = \Delta_1(\mathrm{A}')$.

On démontre un résultat d'invariance analogue avec $\mathrm{A}' = \mathrm{A}+(0,1)$, et plus généralement avec $\mathrm{A}' = \mathrm{A}+(a,b)$.

► *Invariance par translation pour* Δ_2

Soit A une partie de $(\mathbb{N}^*)^2$ et $\mathrm{A}' = (1,0)+\mathrm{A}$. Posons, pour $s>1$ et $t>1$,

$$\mathrm{F}(s,t) = \sum_{(n,m)\in\mathrm{A}} \frac{1}{n^s m^t} \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(s,t) = \sum_{(n,m)\in\mathrm{A}'} \frac{1}{n^s m^t} = \sum_{(n,m)\in\mathrm{A}} \frac{1}{(n+1)^s m^t}.$$

On a alors

$$0 \leqslant \mathrm{F}(s,t) - \mathrm{G}(s,t) \leqslant \sum_{n>0,m>0} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)\frac{1}{m^t} = \zeta(t).$$

Donc $\frac{\mathrm{F}(s,t)-\mathrm{G}(s,t)}{\zeta(s)\zeta(t)}$ tend vers 0 quand s tend vers 1^+.
Si $\Delta_2(\mathrm{A})$ existe, $\Delta_2(\mathrm{A}')$ existe aussi et $\Delta_2(\mathrm{A}) = \Delta_2(\mathrm{A}')$.
On démontre un résultat analogue avec $\mathrm{A}+(0,1)$ puis $\mathrm{A}+(a,b)$.

► *Propriété d'homothétie pour* Δ_1

Soit k un entier donné, avec $k>0$.
Si une partie A de $(\mathbb{N}^*)^2$ a une densité $\Delta_1(\mathrm{A})$, alors $\Delta_1(k\mathrm{A})$ existe et est égal à $\frac{\Delta_1(\mathrm{A})}{k^2}$.

En effet, $(k\mathrm{A})(n,n') = \mathrm{A}\left(\left\lfloor \frac{n}{k}\right\rfloor, \left\lfloor \frac{n'}{k}\right\rfloor\right)$. Donc $\dfrac{\operatorname{card}\mathrm{A}\left(\left\lfloor \frac{n}{k}\right\rfloor, \left\lfloor \frac{n'}{k}\right\rfloor\right)}{\left\lfloor \frac{n}{k}\right\rfloor \left\lfloor \frac{n'}{k}\right\rfloor}$, qui est équivalent en $+\infty$ à $k^2\dfrac{\operatorname{card}\mathrm{A}\left(\left\lfloor \frac{n}{k}\right\rfloor, \left\lfloor \frac{n'}{k}\right\rfloor\right)}{nn'}$, a pour limite $\Delta_1(\mathrm{A})$ quand n et n' tendent vers $+\infty$. Donc $\frac{\operatorname{card}(k\mathrm{A})(n,n')}{nn'}$ a pour limite $\frac{\Delta_1(\mathrm{A})}{k^2}$.

► *Propriété d'homothétie pour* Δ_2

Si une partie A de $(\mathbb{N}^*)^2$ a une densité $\Delta_2(\mathrm{A})$, alors $\Delta_2(k\mathrm{A})$ existe et est égal à $\frac{\Delta_2(\mathrm{A})}{k^2}$.
Posons, pour $s>1$ et $t>1$,

$$\mathrm{F}(s,t) = \sum_{(n,m)\in\mathrm{A}} \frac{1}{n^s m^t} \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(s,t) = \sum_{(n,m)\in k\mathrm{A}} \frac{1}{n^s m^t} = \sum_{(n,m)\in\mathrm{A}} \frac{1}{k^{s+t} n^s m^t}.$$

Alors $\frac{\mathrm{G}(s,t)}{\zeta(s)\zeta(t)} = \frac{\mathrm{F}(s,t)}{k^{s+t}\zeta(s)\zeta(t)}$ tend vers $\frac{\Delta_2(\mathrm{A})}{k^2}$ quand s et t tendent vers 1^+.

VII.3 Lien avec D_1 et D_2

Soit une partie A de $(\mathbb{N}^*)^2$, de la forme $\mathrm{A} = \mathrm{U}\times\mathrm{V}$, où U et V sont des parties de $\mathbb{N}^*$.

► Si U et V ont une densité D_1, alors A a une densité Δ_1, et $\Delta_1(\mathrm{A}) = \mathrm{D}_1(\mathrm{U})\mathrm{D}_1(\mathrm{V})$. Ceci vient du fait que, pour tous entiers n et n', $\operatorname{card}\mathrm{A}(n,n') = \operatorname{card}\mathrm{U}(n)\operatorname{card}\mathrm{V}(n')$.

► Si U et V ont une densité D_2, alors A a une densité Δ_2, et $\Delta_2(\mathrm{A}) = \mathrm{D}_2(\mathrm{U})\mathrm{D}_2(\mathrm{V})$. En effet, $\displaystyle\sum_{(n,m)\in\mathrm{A}} \frac{1}{n^s m^t} = \sum_{n\in\mathrm{U}} \frac{1}{n^s} \sum_{m\in\mathrm{V}} \frac{1}{m^t}$.

VII.4 Lien entre Δ_1 et Δ_2

Soit une partie F de $\mathbb{N}^{*2}$. Si $\Delta_1(\mathrm{F})$ existe, $\Delta_2(\mathrm{F})$ existe aussi et $\Delta_1(\mathrm{F}) = \Delta_2(\mathrm{F})$.

Démonstration. Soit la suite double (e_{nm}) caractéristique de F : $e_{nm} = 1 \quad \text{si } (n,m) \in \mathrm{F}$ et $e_{nm} = 0 \quad \text{si } (n,m) \notin \mathrm{F}$.

On suppose que $\frac{1}{\mathrm{NN}'} \displaystyle\sum_{(n,m)\in[\![1,\mathrm{N}]\!]\times[\![1,\mathrm{N}']\!]} e_{nm}$ a une limite λ quand N et N′ tendent vers $+\infty$.

Soit $\mathrm{G}(s,t) = \displaystyle\sum_{n>0,m>0} \frac{e_{nm}}{n^t m^s}$. On souhaite démontrer que $(s-1)(t-1)\mathrm{G}(s,t)$ tend vers λ quand s et t tendent vers 1^+. On applique deux fois le procédé de sommation d'Abel.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{S}_n(u) = \displaystyle\sum_{m\leqslant u} e_{nm}$ qui est au plus égal à u. On peut donc écrire $\displaystyle\sum_{m>0} \frac{e_{nm}}{m^s} = s\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{S}_n(u)}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u$, quantité que l'on note b_n. Remarquons que, comme $\mathrm{S}_n(u) \leqslant u$, $b_n \leqslant \frac{s}{s-1}$.

Soit $\mathrm{T}(v) = \displaystyle\sum_{n\leqslant v} b_n$; alors $\mathrm{T}(v) \leqslant v\frac{s}{s-1}$. Donc, pour $t>1$, $\frac{\mathrm{T}(x)}{x^t}$ tend vers 0 en $+\infty$.

$$\mathrm{G}(s,t) = \sum_{n>0} \frac{b_n}{n^t} = t\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{T}(v)}{v^{t+1}}\,\mathrm{d}v = ts\int_1^{+\infty} \sum_{n\leqslant v} \left(\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{S}_n(u)}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u\right)\frac{\mathrm{d}v}{v^{t+1}}.$$

D'après le théorème de Fubini, $\mathrm{G}(s,t) = ts\displaystyle\iint_{[1,+\infty[^2} \sum_{n\leqslant v; m\leqslant u} e_{n,m} \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{u^{s+1}v^{t+1}}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe c tel que $\forall u \geqslant c, \forall v \geqslant c, \quad (\lambda-\varepsilon)uv \leqslant \displaystyle\sum_{n\leqslant v; m\leqslant u} e_{n,m} \leqslant (\lambda+\varepsilon)uv$

On peut écrire l'intégrale double définissant $\mathrm{G}(s,t)$ comme somme de quatre intégrales :

$$\begin{aligned}\mathrm{G}(s,t) = {} & \underbrace{ts\iint_{[1,c]^2} \sum_{n\leqslant v; m\leqslant u} e_{n,m} \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{u^{s+1}v^{t+1}}}_{=\mathrm{J}_1} + \underbrace{ts\iint_{[1,c]\times[c,+\infty[} \sum_{n\leqslant v; m\leqslant u} e_{n,m} \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{u^{s+1}v^{t+1}}}_{=\mathrm{J}_2} \\ & + \underbrace{ts\iint_{[c,+\infty[\times[1,c]} \sum_{n\leqslant v; m\leqslant u} e_{n,m} \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{u^{s+1}v^{t+1}}}_{=\mathrm{J}_3} + \underbrace{ts\iint_{[c,+\infty[^2} \sum_{n\leqslant v; m\leqslant u} e_{n,m} \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{u^{s+1}v^{t+1}}}_{=\mathrm{J}_4}.\end{aligned}$$

L'intégrale J_1 est bornée quand s et t sont compris entre 1 et 2 car $u^{s+1}v^{t+1} \geqslant 1$.

Montrons que $\mathrm{J}_2 = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t-1}\right)$ quand s et t tendent vers 1^+.

Dans J_2, $\sum_{n\leqslant v; m\leqslant u} e_{n,m} \leqslant cv$. Donc $\mathrm{J}_2 \leqslant cts\displaystyle\int_1^c \frac{\mathrm{d}u}{u^{s+1}} \int_c^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{v^t}$. La première intégrale est bornée, la deuxième vaut $\frac{1}{(t-1)c^{t-1}}$, d'où le résultat.

De même, $\mathrm{J}_3 = \mathrm{O}\left(\frac{1}{s-1}\right)$ quand s et t tendent vers 1^+.

Donc $\mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2 + \mathrm{J}_3 = o\left(\frac{1}{(t-1)(s-1)}\right)$.

Enfin,

$$(\lambda-\varepsilon)\mathrm{L}(s,t) \leqslant \mathrm{J}_4 \leqslant (\lambda+\varepsilon)\mathrm{L}(s,t),$$

où $\mathrm{L}(s,t) = ts\displaystyle\int_c^{+\infty}\int_c^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{u^s v^t} = \frac{st}{(s-1)(t-1)c^{s+t-2}}$. Or $(s-1)(t-1)\mathrm{L}(s,t)$ tend vers 1 quand s et t tendent vers 1^+, donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (s,t) \in]1, 1+\alpha[^2, \quad \lambda - 2\varepsilon \leqslant (s-1)(t-1)\mathrm{G}(s,t) \leqslant \lambda + 2\varepsilon$$

et le résultat est démontré. □

VII.5 « Probabilité » que deux entiers choisis au hasard soient premiers entre eux

Le résultat bien connu suivant est dû à Cesàro : La « probabilité » pour que deux entiers choisis au hasard soient premiers entre eux est égale à $\frac{6}{\pi^2}$.

Il ne s'agit pas d'une probabilité au sens propre du terme, mais d'une densité.

$A = \left\{(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \,/\, n_\Lambda m = 1\right\}$

Pour la démonstration avec la densité naturelle, voir [5] p. 142-145.

En utilisant la densité zêta, on a une démonstration immédiate.

Démonstration. On reprend le calcul et le résultat du VI.8 : $\zeta(s)\zeta(t) = \zeta(s+t) \sum\limits_{u \wedge v = 1} \dfrac{1}{u^s v^t}$.

Quand s et t tendent vers 1^+, $\dfrac{1}{\zeta(s)\zeta(t)} \sum\limits_{u \wedge v = 1} \dfrac{1}{u^s v^t}$ tend donc vers $\dfrac{1}{\zeta(2)} = \dfrac{6}{\pi^2}$.

Donc $\Delta_2(A) = \frac{6}{\pi^2}$. L'inconvénient de ce raisonnement, c'est qu'il ne prouve pas que $\Delta_1(A)$ existe. □

Bibliographie

[1] Claude George. *Exercices et problèmes d'intégration*. Paris, Gauthier-Villars, 1980.

[2] Jean-Paul Delahaye. Les entiers ne naissent pas égaux. *Pour la Science*, Logique et calcul, n° 421, nov. 2012.

[3] Perci Diaconis. *Weak and Strong averages in Probability and Theory of Numbers*, thèse de l'Université Harvard, 1974, `http://www-stat.stanford/edu/~cgates/PERSI/Persi_PhDdiss.pdf`

[4] Michel Mendès France, William John Ellison. *Les Nombres premiers*. Hermann, Paris, 1975.

[5] Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas. *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures – Algèbre 1*. Cassini, Paris, 2001.