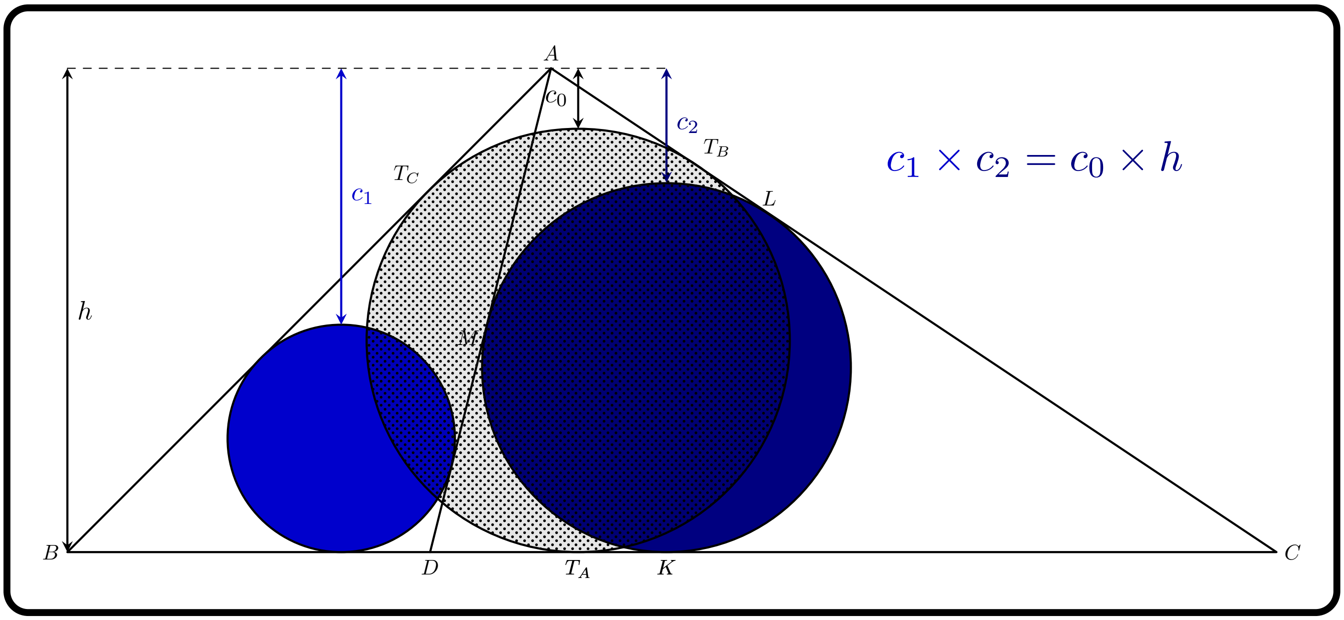

On note r_1 et r_2 respectivement les rayons des cercles inscrits dans ABD et ADC, r le rayon du cercle inscrit dans ABC. On note a, b et c les longueurs BC, CA et AB et p le demi-périmètre de ABC : $p = (a + b + c)/2$ et on a ainsi $\mathcal{A}_{ABC} = rp$.

On va calculer les aires des triangles ABD et ADC.

$$AD = AM + MD = AL + DK = AC - CL + CD - CK$$
$$= AC + CD - 2CK \quad \text{(voir fig.1)}$$

D'autre part $CK = \dfrac{r_2}{r} CT_A$ (voir fig.2)

et $CT_A = CB - BT_A = CB - BT_C = CB + T_C A - AB$
$= p - c$ (voir fig 3.)

On en tire $CK = \dfrac{r_2}{r}(p - c)$

$$\mathcal{A}_{ABD} = r_1 \left(\frac{AB + BD + AD}{2} \right) = r_1 \left(p - \frac{r_2}{r}(p - c) \right)$$

et de même $\mathcal{A}_{ADC} = r_2 \left(p - \dfrac{r_1}{r}(p - b) \right)$

Puisque $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{ADC}$ on obtient :

$$rp = r_1 \left(p - \frac{r_2}{r}(p - c) \right) + r_2 \left(p - \frac{r_1}{r}(p - b) \right)$$
$$rp = (r_1 + r_2)p - \frac{r_1 r_2}{r}(2p - b - c)$$
$$rp = (r_1 + r_2)p - \frac{r_1 r_2}{r} a$$

or l'aire de ABC vaut $rp = \dfrac{ah}{2}$ donc $\dfrac{a}{r} = \dfrac{2p}{h}$ d'où

$rp = (r_1 + r_2)p - \dfrac{r_1 r_2 2p}{h}$ ou encore $r = r_1 + r_2 - \dfrac{2 r_1 r_2}{h}$

ce qui s'écrit aussi : $\boxed{h(h - 2r) = (h - 2r_1) \times (h - 2r_2)}$

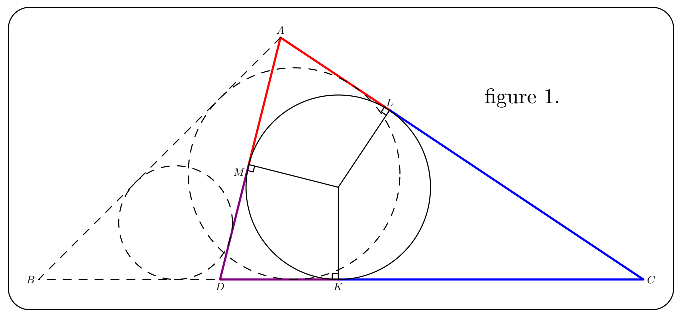

figure 1.

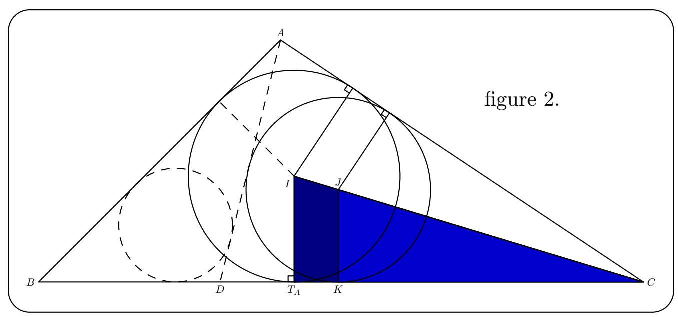

figure 2.

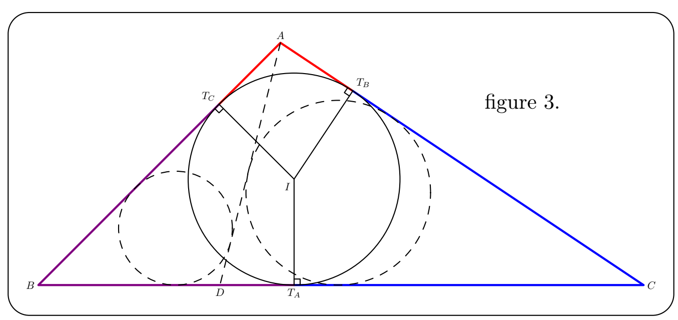

figure 3.